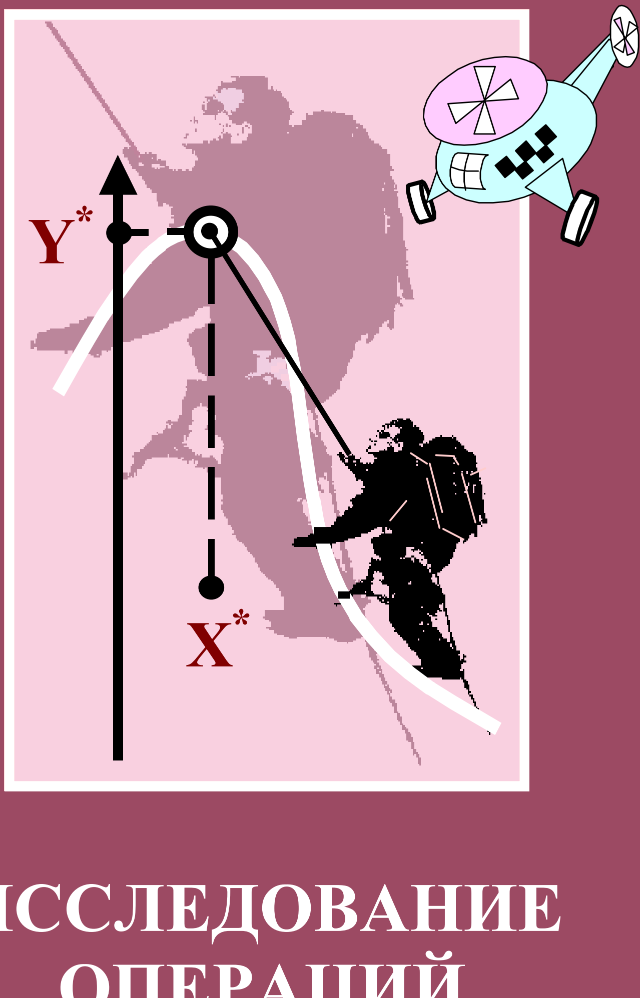
Н.И.Самойленко, Б.Г.Скоков,



ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ
ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА

Н.И. Самойленко, Б.Г.Скоков

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

*Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
как учебное пособие для студентов специальностей
«Бухгалтерский учет и аудит»,
«Менеджмент организаций»*

Харьков – ХНАГХ – 2005

ББК 22.18
УДК 519.47

Самойленко Н.И., Скоков Б.Г.
С17 Исследование операций (Математическое программирование. Теория массового обслуживания): Уч. пособие. – Харьков: ХНАГХ, 2005. – 176 с.

Пособие знакомит с основными понятиями и методами исследования операций. Приведенные методы иллюстрируются типовыми примерами. Большое внимание уделяется использованию современных информационных технологий для решения прикладных задач исследования операций.

Предназначено для студентов высших учебных заведений специальностей 8.0501 06 «Бухгалтерский учет и аудит» и 8.0502 01 «Менеджмент организаций».

Табл. – 21. Ил. – 34. Библиогр. – 18 назв.

Гриф выдан Министерством образования и науки Украины, решение № 1/11-6486 от 17.12.04.

Рецензенты:

директор Института компьютерных и информационных технологий Харьковского национального университета радиоэлектроники, д-р техн. наук, проф. *В.М.Левыкин*;

зав. кафедры высшей математики Харьковской национальной академии городского хозяйства, д-р техн. наук, проф. *А.И. Колосов*

ISBN 966-695-060-X

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения вузов, прослушавших курсы «Высшая математика» и «Основы информатики» и проходящих подготовку по специальностям 8.0501 06 «Бухучет и аудит», 8.0502 01 «Менеджмент организаций».

Цель пособия – обеспечить студентов учебно-практическим материалом для самостоятельного изучения дисциплины «Исследование операций» и практического использования методов дисциплины для моделирования и решения прикладных задач организации, планирования и управления производством с использованием современных информационных технологий.

Дисциплина «Исследование операций» способствует дальнейшему повышению уровня фундаментальной математической и компьютерной подготовки студентов.

В результате изучения теоретического курса, проведения практических и лабораторных занятий, выполнения индивидуальных заданий и контрольных работ студенты должны:

освоить методику математико-статистической обработки производственной информации при решении конкретных задач организации, планирования и управления;

научиться использовать методы математического программирования и теории массового обслуживания для решения производственных и планово-экономических задач;

приобрести практические навыки по выбору и использованию современных информационных технологий для решения задач теории исследования операций;

усвоить методы и приемы исследования математических моделей систем массового обслуживания с помощью современных информационных технологий.

Особенностями учебного пособия являются: направленность курса на подготовку специалистов в области экономики, предпринимательства и менеджмента; компьютерный уклон при выполнении рутинных вычислительных процедур поиска решения в задачах исследования операций; индивидуализация обучения и возможность самостоятельного изучения курса. С этой целью по каждой теме курса в пособие включены задачи экономического характера с подробным изложением технологии их решения средствами современной компьютерной техники.

Для обеспечения возможности самостоятельного изучения курса пособие содержит примеры решения типовых задач по каждой теме, наборы задач для самостоятельного решения с ответами и контрольные вопросы для самопроверки.

В основу пособия положен курс лекций по исследованию операций и информационным технологиям, читаемый нами в высших учебных заведениях.

Выражаем искренною благодарность рецензентам за их кропотливый труд по рецензированию учебного пособия и существенные замечания, которые способствовали улучшению содержания книги и методики её изложения.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика дисциплины

Для обеспечения качественного роста общественного производства и достижения наивысшей производительности труда необходимо перестроить в соответствии с современными методами управления хозяйственный механизм. Переход к рыночным отношениям расширил права предприятий, их самостоятельность, совершенствуются организация, нормирование и стимулирование труда и на этой основе повышается ответственность и заинтересованность трудовых коллективов в конечных результатах работы.

Курс "Исследование операций" является одним из основных для студентов, обучающихся на экономическом факультете. Он состоит из двух разделов, охватывающих важнейшие математические методы решения задач организации, планирования и управления.

На лекциях студенты последовательно знакомятся с:

методами и приемами математико-статистического моделирования технико-экономических показателей на основе качественного и количественного исследования условий производства, профессионального мастерства работников, уровня организации труда и техники и других факторов;

принципами составления математических моделей конкретных задач теории исследования операций на основе поставленных целей, необходимых условий и требований их достижения;

математическими методами решения задач теории исследования операций, имеющих приложения в экономике и менеджменте;

анализом математических моделей прикладных задач экономики и менеджмента с последующим выбором информационной технологии компьютерного варианта их решения.

В результате изучения теоретических основ курса студенты должны знать:

основные положения и методические принципы математико-статистического моделирования производственных процессов и технико-экономических показателей;

методику предварительной обработки результатов экспериментальных исследований, хронометражных данных и другой производственной информации при решении конкретных задач организации, планирования и управления;

классификацию задач исследования операций в зависимости от количества, типа и области допустимых значений переменных, количества и типа целевых функций, количества, вида и характера ограничивающих факторов;

математические методы решения типовых задач теории исследования операций;

существующие информационные технологии эффективного решения прикладных задач теории исследования операций.

В результате проведения практических и лабораторных занятий, а также выполнения индивидуальных контрольных заданий, предусмотренных программой курса, студенты должны уметь:

предварительно обрабатывать производственную информацию при решении конкретных задач;

формулировать и проверять статистические гипотезы;

составлять и классифицировать математические модели задач в соответствии с их типом;

выбирать математический метод и информационную технологию для решения конкретной прикладной задачи теории исследования операций;

определять тип задач массового обслуживания и необходимую для ее решения производственную информацию.

Современные информационные технологии в исследовании операций

Процедуры решения задач исследования операций предполагают выполнение большого объема вычислительных операций. Многие из процедур носят цикличный характер. Рутинная работа по поиску решения требует больших затрат сил и времени и может служить причиной возникновения ошибок. Чтобы избежать появления ошибочных результатов вычислительного характера, свойственных человеку, и на несколько порядков сократить время решения, необходимо процедуры решения задач исследования операций осуществлять с помощью современной компьютерной техники.

В настоящем курсе используются ряд информационных технологий, зарекомендовавших себя как наиболее удачные программно-инструментальные средства для решения различных задач теории исследования операций. Выбор той или иной технологи для решения конкретной задачи определяется, в первую очередь, способностью выбранной технологии справиться с решением поставленной задачи. Но не менее важным условием для выбора является доступность программного средства. По указанным причинам для учебных целей используются профессиональные программные средства, получившие распространение во всем мире, а именно:

для решения экстремальных задач с дискретной математической моделью и расчета показателей функционирования систем массового обслуживания в установившемся режиме работы используется офисный пакет *Microsoft Office* версии 7.0 и выше;

для решения экстремальных задач с непрерывной математической моделью и расчета показателей функционирования систем массового обслуживания в неустановившемся режиме работы используется профессиональный математический пакет *MathCAD 2000*.

Особенности использования перечисленных информационных технологий для решения задач, рассматриваемых в курсе, будут детально рассмотрены в соответствующих подразделах.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА

Предмет, цель и задачи курса

Предмет курса – производственные и планово-экономические задачи по рациональному использованию трудовых, материальных и финансовых ресурсов, традиционные методы и приемы их решения, компьютерные технологии решения задач теории исследования операций.

Цель курса – систематическое изучение методов экономико-математического моделирования производственных процессов и их практического приложения к решению задач организации, планирования и управления производством.

Задачи курса. В результате изучения теоретического курса, выполнения практических и лабораторных заданий студенты должны:

освоить методику математико-статистической обработки производственной информации при решении конкретных задач по организации, планированию и управлению производством;

овладеть методами математического программирования и теории массового обслуживания;

научится выбирать и использовать современные компьютерные технологии для решения задач исследования операций.

РАЗДЕЛ 1
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Тема 1.1. Экономические предпосылки постановки и решения задач математического программирования

Развитие численных методов решения планово-экономических и производственных задач. Основные экономические предпосылки постановки и решения задач методами математического программирования: органичное сочетание централизованного народнохозяйственного планирования с расширением самостоятельности предприятий, многовариантность использования ограниченных ресурсов и производственных мощностей, возможность получения необходимой и достоверной информации, широкое использование ЭВМ, достаточная теоретическая разработка методов экономико-математического моделирования.

Тема 1.2. Общая характеристика задач математического программирования

Сущность оптимального решения задачи достижения заданного результата при минимальном расходовании ресурсов, или максимального эффекта при ограниченных ресурсах. Критерии оценки (оптимальности) принимаемых решений, этапы решения экстремальных задач. Допустимые и оптимальные решения.

Классификация задач математического программирования и методов их решения. Линейное и нелинейное программирование. Алгоритмы решения экстремальных задач и их отличительные особенности. Понятие о стохастическом, целочисленном и динамическом программировании. Примеры производственных задач.

Тема 1.3. Транспортная задача. Математическая формулировка и алгоритм решения

Содержательная постановка задачи. Математическая модель задачи. Теорема о разрешимости транспортной задачи. Особенности решения закрытой транспортной задачи. Определение начального опорного плана транспортной задачи. Метод северо-западного угла. Определение оптимального опорного плана транспортной задачи. Условия оптимальности. Понятия цикла и потенциалов в транспортной задаче. Метод потенциалов. Пример решения транспортной задачи методом потенциалов на конкретном примере.

Тема 1.4. Информационные технологии в решении задач математического программирования

Выбор информационной технологии для решения задач математического программирования. Технология решения транспортной задачи с помощью информационной системы Microsoft Excel. Встроенная программа Solver. Представление исходных, промежуточных и выходных данных для решения транспортной задачи в информационной системе Microsoft Excel. Пример решения транспортной задачи с помощью информационной системы Microsoft Excel. Технология решения транспортной задачи с помощью информационной системы MathCAD 2000.

Тема 1.5. Разновидности транспортных задач

Целочисленная транспортная задача. Транспортная задача о распределении выпуска продукции. Распределительная транспортная задача о выборе средств доставки груза. Транспортная задача о двухэтапной перевозке груза. Транспортная задача о двухэтапной перевозке груза нескольких видов. Транспортная задача о двухэтапной перевозке груза нескольких видов по запросам потребителей. Транспортная задача о закрытии предприятия.

Тема 1.6. Задачи целочисленного линейного программирования

Особенности решения задач целочисленного линейного программирования. Содержательная постановка, математическая модель и пример транспортной задачи о расстановке грузового флота. Содержательная постановка, математическая модель и пример транспортной задачи о развозке груза.

РАЗДЕЛ 2
ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Тема 2.1. Понятия о системах массового обслуживания и общая характеристика решаемых задач

Теория массового обслуживания как самостоятельная научная дисциплина. История развития теории массового обслуживания. Роль теории массового обслуживания в решении задач повышения эффективности организации и функционирования производства. Особенности задач теории массового обслуживания. Прикладное значение теории массового обслуживания. Примеры задач массового обслуживания в жилищно-коммунальном хозяйстве.

Тема 2.2. Основные понятия, терминология и классификация систем массового обслуживания

Понятие системы массового обслуживания. Составные элементы систем массового обслуживания. Входящий и выходящий потоки требований, обслуживающие каналы (аппараты, устройства), очередь на обслуживание. Разновидности систем массового обслуживания и их классификация. Одно- и многоканальные системы, замкнутые и разомкнутые, упорядоченные и неупорядоченные, с отказами и ожиданием, с ограниченной и неограниченной длиной очереди. Критерии оценки качества функционирования систем массового обслуживания.

Тема 2.3. Математико-статистическая обработка производственных данных

Понятие о простейшем потоке требований. Пуассоновский закон распределения потока требований. Свойства простейшего потока требований: стационарности, ординарности и отсутствия последействия. Возможность решения задач массового обслуживания при несоблюдении свойств простейшего потока требований. Время между поступлениями требований, время обслуживания и исследование законов их распределения. Построение статистического ряда случайной величины. Количественная и качественная оценка степени соответствия теоретической кривой распределения опытным данным.

Тема 2.4. Показатели эффективности систем массового обслуживания

Технические показатели эффективности систем массового обслуживания. Вероятность отказа в обслуживании. Среднее количество требований, ожидающих обслуживания. Относительная и абсолютная пропускные способности системы. Среднее число каналов, занятых обслуживанием. Общее количество требований, находящихся в системе. Среднее время ожидания требованиями начала обслуживания. Экономические показатели эффективности систем массового обслуживания.

Тема 2.5. Цепи Маркова и уравнения Колмогорова для систем массового обслуживания

Графическая интерпретация математических моделей систем массового обслуживания. Марковские цепи для наиболее часто встречающихся в инженерной практике систем массового обслуживания. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы массового обслуживания. Понятие плотности вероятности перехода из одного состояния в другое. Системы уравнений Колмогорова для неустановившихся и установившихся потоков требований.

Тема 2.6. Разомкнутые системы массового обслуживания

Особенности разомкнутых систем массового обслуживания с не*ограниченным* временем ожидания. Условие функционирования системы. Исходные параметры системы для расчета показателей системы. Расчет показателей функционирования системы. Отношение интенсивности входного потока требований к выходному. Вероятности одновременного пребывания в системе нескольких требований. Вероятность отсутствия требований в системе. Вероятность появления очереди. Средняя длина очереди. Среднее время ожидания обслуживания. Среднее число свободных каналов. Коэффициент простоя канала. Примеры решения производственных задач. Технико-экономическое обоснование эффективности увеличения производительности обслуживающей системы. Компьютерный расчет показателей разомкнутой системы массового обслуживания с неограниченным временем ожидания. Особенности разомкнутой системы массового обслуживания с *ограниченным* временем ожидания. Расчет показателей функционирования системы с ограниченным временем ожидания. Пример расчета. Особенности разомкнутой системы массового обслуживания с *ограниченной длиной очереди.* Расчет показателей функционирования системы с ограниченной длиной очереди. Пример расчета.

Тема 2.7. Замкнутые системы массового обслуживания

Особенности одноканальных замкнутых систем массового обслуживания. Исходные параметры для расчета показателей системы. Расчет показателей функционирования системы. Отношение интенсивности входного потока требований к выходному. Вероятности одновременного пребывания в системе нескольких требований. Вероятность отсутствия требований в системе. Коэффициент простоя канала. Вероятность занятости канала обслуживанием. Математическое ожидание числа объектов, находящихся в системе. Коэффициента простоя объекта. Средняя длина очереди. Коэффициент простоя объекта в ожидании обслуживания Среднее время ожидания обслуживания. Примеры расчета. Компьютерный расчет показателей функционирования одноканальной замкнутой системы массового обслуживания. Одноканальная замкнутая система массового обслуживания в неустановившемся режиме и компьютерная технология расчет параметров функционирования с помощью системы MathCAD 2000. Анализ результатов расчета. Многоканальная замкнутая система массового обслуживания в установившемся режиме. Компьютерный расчет показателей функционирования многоканальной замкнутой системы массового обслуживания в установившемся режиме. Многоканальная замкнутая система массового обслуживания в неустановившемся режиме и расчет ее параметров с помощью системы MathCAD 2000. Анализ результатов расчета.

Тема 2.8. Системы массового обслуживания с отказами

Особенности одноканальной системы массового обслуживания с отказами и основные показатели ее функционирования. Расчет показателей. Коэффициент загрузки. Вероятности одновременного пребывания в системе нескольких требований. Вероятность отсутствия требований в системе. Коэффициент простоя канала. Абсолютная производительность системы. Вероятность отказа в обслуживании. Примеры расчета показателей. Особенности многоканальной системы массового обслуживания с отказами. Традиционные и компьютерные технологии расчета показателей многоканальной системы массового обслуживания с отказами. Исследование математических моделей многоканальных систем массового обслуживания с отказами с помощью информационной системы Microsoft Excel.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Раздел 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Тема 1.1. Экономические предпосылки постановки и решения задач математического программирования

На каком бы уровне не находилось общественное производство, как бы велики не были трудовые, материальные и финансовые ресурсы, перед хозяйственными руководителями всегда стоит задача наилучшего использования органических производственных ресурсов и мощностей.

Определенным отраслям народного хозяйства, производственным объединениям, предприятиям и их структурным подразделениям предоставлена возможность самостоятельно решать вопросы рационального использования выделенных ресурсов для достижения своих производственных целей. В пределах установленных нормативов, лимитов и правовых заданий производственные объединения и предприятия могут маневрировать имеющимися ресурсами, принимать важные экономические и производственные решения, от которых зависит использование оборудования, производительность труда, себестоимость и качество продукции, а также все другие стороны производственно-хозяйственной деятельности.

Впервые подобная задача в виде предложения по составлению национального плана перевозок, позволяющего минимизировать суммарный километраж, дана в работе советского экономиста Л.Н.Толстого (1930 г.). Экстремальная задача по минимизации транспортных расходов была им сформулирована в 1939 г.

Одну из разновидностей транспортной задачи в 1941 г. поставил американец Хичкок (проблема Хичкока). Однако законченный метод решения данной задачи им разработан не был.

В общем виде задача математического программирования сформулирована в 1939 г. Л.В.Канторовичем. Он же предложил метод (разрешающих множителей) ее решения. Совместно с М.К.Гавуриным в 1949 г. Л.В.Канторович разработал метод потенциалов, который до настоящего времени является наиболее предпочтительным и применяется при решении транспортных задач.

Широко известный метод решения задач линейного программирования – симплексный метод – был опубликован Д.Б.Данцигом в 1949г. Удачной модификацией симплексного метода является дифференциальный алгоритм, который логически вытекает из дифференциального алгоритма решения общей задачи математического программирования. Данный метод на протяжении последних десятилетий (с 1978г.) успешно читается профессорами А.Г.Евдокимовым и Н.И.Самойленко в Харьковской национальной академии городского хозяйства.

Применение математических методов в экономике на первом этапе ознаменовалось довольно ожесточенной дискуссией экономистов "традиционной" школы и экономистов нового поколения. Однако сейчас уже совсем мало осталось экономистов, которые бы прямо отрицали необходимость и плодотворность использования математических методов при решении таких важных проблем, как:

ценообразование;

исследование межотраслевых связей;

повышение эффективности капитальных вложений;

использование ограниченных ресурсов;

размещение производительных сил;

обоснование нормативов расхода материалов и оборотных средств и многие другие, не менее важные экономические задачи.

Учитывая то, что гигантский хозяйственный механизм Украины производит более 15 *млн*. наименований различной продукции, становится очевидным утопичность такой многокритериальной и всеохватывающей оптимизации народнохозяйственного плана. Управлять такой массой хозяйственных ячеек можно только с помощью многоуровневой структуры управления: центральные органы, отраслевые, производственно-территориальные объединения и отдельные предприятия.

По вышеуказанным и другим причинам на уровне народного хозяйства преимущественно используются неформальные методы оптимального планирования с привлечением для решения частных вопросов экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники.

Основными экономическими предпосылками постановки и решения задач методами математического программирования следует считать:

органическое сочетание централизованного народно-хозяйствен-ного планирования с самостоятельностью предприятий, производственных объединений и отраслей экономики;

наличие нескольких или многих возможных (альтернативных допустимых, но не равнозначных) вариантов использования ограниченных ресурсов и производственных мощностей;

широкое использование экономико-математических методов в сочетании с современными средствами электронно-вычислительной техникой;

возможность получения необходимой и достоверной производственно-экономической информации;

достаточная теоретическая разработка методов решения задач математического программирования.

Тема 1.2. Общая характеристика задач математического программирования

Математическое программирование как прикладной раздел высшей математики играет исключительно важную роль в подготовке специалистов экономического профиля. Использование математических методов в инженерно-экономической деятельности позволяет решать оптимальным образом многие производственные задачи организации, планирования и управления. Другими словами, инженер-экономист становится обладателем надёжного инструмента для получения наивысшего экономического эффекта в конкретных производственных условиях.

Выражение "*математическое программирование*" следует понимать как многошаговое отыскание наилучшего варианта использования ограниченных производственных мощностей и ресурсов для достижения поставленных целей.

Примерами, которые наглядно иллюстрируют полезность и необходимость знания методов математического программирования, могут быть следующие экономические задачи (приводятся в содержательной постановке):

получение максимального выпуска продукции или максимальной прибыли при заданных материальных, трудовых или временных затратах;

обеспечение плановых показателей предприятия при минимальных финансовых вложениях или минимальном расходе какого-либо производственного ресурса;

достижение минимального срока изготовления продукции, строительства объекта, товарооборота, производственного цикла и т.п. при существующих или заданных производственных ресурсах (материальных, трудовых, энергетических и др.);

обеспечение минимальной себестоимости продукции при заданных производственных ресурсах.

В приведенных примерах максимальный выпуск продукции, максимальная прибыль, минимальные финансовые вложения, максимально короткий срок – это есть искомые *оптимумы* (*максимумы* или *минимумы*).

В математике максимум и минимум имеют ещё одно название – *экстремум*, а задачи поиска экстремума называют *экстремальными задачами*.

В приведенных примерах условия, которые накладываются на решение задачи (заданные материальные, трудовые и временные затраты; плановые показатели; производственные ресурсы), называют *ограничениями* задачи.

Ограничения задачи определяют *область допустимых решений.* Те допустимые решения, при которых достигается оптимум, называют *оптимальными* или *экстремальными решениями.*

В общем случае экстремальная задача может иметь одно, несколько, множество, бесконечное множество или ни одного оптимального решения.

В практике инженера-экономиста оптимальное решение принято называть *оптимальным планом*.

Содержательная постановка задачи должна позволять переходить к строгой *математической модели*. В противном случае необходимо пройти довольно трудоёмкие и кропотливые процедуры математического моделирования и идентификации производственных процессов, которые в настоящем курсе не рассматриваются.

В общем виде экстремальная задача формулируется следующим образом: определить наибольшее (максимальное) или наименьшее (минимальное) значение некоторой функции $Y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условиях $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1, m})$, где y и f_i – заданные функции, а b_i – действительные числа.

Приведенная формулировка является обобщением постановок ряда частных задач математического программирования, которые могут различаться между собой как видом функций y и f_i (линейные, нелинейные, стохастические), так и характером переменных (дискретный, непрерывный).

Оптимизируемую (минимизируемую или максимизируемую) функцию $Y(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют *целевой* функцией.

В зависимости от особенностей функций y и f_i математическое программирование можно разделить на ряд самостоятельных дисциплин, которые изучают и разрабатывают методы решения отдельных классов задач.

Прежде всего, задачи математического программирования делятся на задачи *линейного* и *нелинейного программирования*. При этом, если все функции y и f_i являются линейными, то соответствующая задача относится к классу задач линейного программирования. Если же хотя бы одна из указанных функций является нелинейной, то соответствующая задача относится к классу задач нелинейного программирования.

Линейное программирование является наиболее изученным разделом математического программирования. Для решения задач линейного программирования разработан целый ряд эффективных методов.

Наиболее универсальным методом решения задач линейного программирования является дифференциальный алгоритм, который логически вытекает из дифференциального алгоритма общей задачи математического программирования. Дифференциальный алгоритм, как и широко известный симплекс-метод, позволяет решать любые задачи линейного программирования. Однако для некоторых классов задач линейного программирования целесообразно использовать более простые методы. Так, для решения задач с количеством переменных, равным двум, используют *графический метод*, отличающийся простотой и наглядностью, но требующий графических построений. Для решения задач линейного программирования, известных как *транспортных*, используют *метод потенциалов*.

Методической основой вычислительных процедур любого метода является принцип анализа и последовательного улучшения некоторого исходного плана распределения и использования ресурсов. План улучшают до тех пор, пока не будет найден наилучший (оптимальный) вариант. Другими словами, сначала составляется некоторый первоначальный план, который анализируется по определенным, строго разработанным правилам. На основания анализа определяется возможность и направление улучшения исходного варианта плана. Затем вычисляется новый план, подвергаемый такому же анализу и дальнейшему улучшению, т.е. приближению к оптимуму. Вычислительный процесс продолжается до тех пор, пока анализ не покажет невозможность дальнейшего улучшения.

Ввод нелинейных соотношений в систему ограничений либо в целевую функцию, либо в то и другое обусловливает необходимость формулировки и решения задач методами нелинейного программирования. Пока отсутствуют общие, универсальные методы решения такого рода задач, поскольку нелинейность часто приводит к многоэкстремальности.

Среди задач нелинейного программирования наиболее глубоко изучены задачи *выпуклого программирования*. Это задачи, в результате решения которых определяется экстремум выпуклой функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве. Задачи выпуклого программирования имеют один явный экстремум.

В свою очередь, среди задач выпуклого программирования более подробно исследованы задачи *квадратичного программирования*. В результате решения таких задач требуется в общем случае найти экстремум квадратичной функции при ограничениях на переменные в виде системы линейных уравнений или линейных неравенств.

Определенными классами задач математического программирования являются задачи *целочисленного, параметрического* и *дробно-линейного программирования*.

В задачах целочисленного, или *дискретного*, программирования часть или все неизвестные могут принимать только целочисленные значения.

В задачах параметрического программирования целевая функция или функции ограничений, определяющие область возможных изменений переменных, либо и то и другое зависят от некоторых параметров.

В задачах дробно-линейного программирования целевая функция представляет собой отношение двух линейных функций, а функции, определяющие область допустимых решений, также являются линейными.

Особые классы задач представляют собой задачи *стохастического* и *динамического программирования.*

Стохастическое программирование используется для решения задач, у которых ограничения носят вероятностный, случайный характер и необходимо учитывать влияние каких-нибудь непредвиденных обстоятельств. В качестве целевой функции в такого рода задачах может служить математическое ожидание некоторого производственного показателя.

К числу задач такого рода относятся:

комплектование ремонтных предприятий станочным парком, когда заранее неизвестен объем работ;

определение требуемого количества транспортных средств на пассажирских маршрутах, когда объем перевозок носит случайный характер;

определение запасов некоторых ресурсов, когда его поставка носит случайный характер.

С помощью линейного, нелинейного, целочисленного и стохастического программирования решаются задачи, которые сводятся к отысканию оптимального решения без учета возможной динамики производственного процесса, т.е. без учета фактора времени.

Динамическое программирование – это многоэтапные, или многошаговые задачи, требующие оптимизации принимаемых решений, не как единичного акта, а с учетом развития явления, его изменения во времени.

Достоинства динамического программирования:

возможность поэтапного анализа результатов решаемой задачи, определения оптимальной стратегии с учетом фактора времени;

углубление ранее разработанных методов количественного и качественного исследования природы экономических процессов;

более объективное, полное и точное решение планово-экономических и производственных задач.

Таким образом, *математическое программирование* представляет собой математическую дисциплину, которая исследует экстремальные задачи и разрабатывает методы их решения. Математическое программирование как наука находится в процессе постоянного развития. Учёными всего мира разработано много методов для решения разных классов задач математического программирования. Однако многие задачи ещё не имеют эффективных методов решения и ждут своих исследователей.

Решение экстремальной экономической задачи состоит из следующих этапов:

построения экономико-математической модели, т.е. обоснование критерия оптимизации, выявление и формализация в виде уравнений или неравенств наиболее существенных из множества возможных ограничений задачи;

выбора математического метода, позволяющего за конечное число шагов получить искомое решение с любой наперед заданной точностью, или выбора соответствующей компьютерной технологии;

нахождения оптимального плана и анализа полученных результатов с позиций возможного их практического применения, поскольку в экономико-математической модели решаемой задачи учитываются только наиболее существенные связи и зависимости, а не все, которые имеют место на реальном производстве.

С точки зрения экономиста *оптимальным* называется такой план производства, который является наилучшим с позиций достижения максимального или минимального уровня конкретного технико-экономического критерия оценки использования производственного потенциала и имеющихся ресурсов.

Критерием оптимальности называется показатель, по которому оценивается мера эффективности плана. Критерий оптимальности должен быть однозначным и иметь количественное выражение.

Из всего разнообразия задач математического программирования в инженерной практике экономистов, финансистов и менеджеров наиболее часто встречаются задачи линейного программирования. Поэтому рассмотрим ее более подробно.

Общая задача линейного программирования формулируется следующим образом: *найти оптимум линейной функции* $y(\mathbf{x})$, *если на переменные задачи наложены линейные ограничения в виде равенств и неравенств.*

Аналитическая запись этой задачи имеет вид:

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + c_0 \to \underset{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \le 0, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2 = 0, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{A}_3\mathbf{x} + \mathbf{b}_3 \ge 0, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{x} \ge 0, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{x}$ – n-мерный вектор действительных переменных; $\mathbf{c}$ – n-мерный вектор коэффициентов оптимизируемой функции; c_0 – свободный член оптимизируемой функции; $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ – матрицы коэффициентов линейных систем размерности $m_1 \times n,\quad m_2 \times n,\quad m_3 \times n$ соответственно, $m_2 < n$; $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ – векторы свободных членов ограничений размерности $m_1 \times 1,\quad m_2 \times 1,\quad m_3 \times 1$ соответственно.

Частные задачи линейного программирования могут не содержать одной или двух систем ограничений типа (1.2) – (1.4), все равно каких. Кроме того, вместо условия неотрицательности (1.5) может иметь место двусторонняя или односторонняя ограниченность переменных.

Задачу, составленную из (1.1), (1.2) и (1.5), называют *стандартной* задачей линейного программирования.

Каноническая, или *основная* задача линейного программирования имеет вид:

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + c_0 \to \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}\subset\mathbf{R}^n}, \tag{1.6}$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = 0, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \tag{1.8}$$

где $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов размерности $m \times n$, $m < n$; $\mathbf{b}$ – векторы свободных членов размерности $m \times 1$.

Очевидно, что ограничение-неравенство типа "$\leq$" можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а каждое ограничение-неравенство типа "$\geq$" – в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Задачу минимизации линейной функции y умножением последней на -1 можно свести к задаче максимизации. Таким образом, задачу линейной оптимизации (1.1) – (1.5) всегда можно преобразовать в задачу (1.6) – (1.8) и наоборот.

Составление математической модели общей задачи математического программирования или ее канонической формы требует определенных усилий и смекалки. Однако опыт составления математических моделей довольно быстро накапливается. Достаточно иметь практику решения нескольких задач, чтобы в дальнейшем не испытывать особых трудностей при переходе от содержательной постановки задач линейного программирования к формальной (аналитической).

Решение задачи линейного программирования с помощью дифференциального алгоритма подробно рассматривается в курсе «Математическое программирование». Несмотря на то, что дифференциальный алгоритм является универсальным, его использование не всегда оправданно. Рассмотрим классы задач, которые имеют линейные модели, но решение которых целесообразно осуществлять не по дифференциальному алгоритму. Это, прежде всего, *транспортная задача* и задачи *целочисленного линейного программирования.*

Тема 1.3. Транспортная задача. Математическая формулировка и алгоритм решения

1.3.1. Содержательная постановка задачи

Однородный продукт, сосредоточенный в m пунктах отправления в количествах a_1, a_2, $\dots a_m$ единиц соответственно, необходимо доставить в каждый из n пунктов назначения в количествах b_1, b_2, … b_n единиц соответственно. Стоимость (расстояние) перевозки единицы продукта из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения равна c_{ij} и известна для каждого маршрута. Пусть x_{ij} – количество продукта, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Задача заключается в определении таких величин x_{ij} для всех маршрутов, при которых суммарная стоимость или расстояние перевозок были бы минимальными.

1.3.2. Математическая модель задачи

Обозначим:

c_{ij} – тарифы (стоимость, время, расстояние) перевозки единицы груза из i–го пункта отправления в j–й пункт назначения;

a_j – запасы груза в i–м пункте отправления;

b_i – потребность в грузе в j–м пункте назначения;

x_{ij} – количество ед. груза, перевозимого из i–го пункта отправления в j–й пункт назначения.

Тогда математическая модель транспортной задачи о планировании перевозок имеет вид:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min_{x_{ij}\in\Omega}, \tag{1.9}$$

$$\Omega: \quad f_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}\ , \tag{1.10}$$

$$f_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.11}$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.12}$$

Здесь (1.9) – целевая функция, определяющая стоимость перевозок всего груза. Именно экстремальное (минимальное) значение этой функции необходимо найти в задаче. Причем значения переменные x_{ij}, при которых целевая функция достигает своего минимума, должны принадлежать области допустимых решений Ω.

Выражения (1.10) – (1.12) определяют область допустимых решений Ω. При этом выражение (1.10) отражает потребности в грузе в пунктах назначения, выражение (1.11) определяет запасы грузов в пунктах отправления, а выражение (1.12) отсекает отрицательную область значений x_{ij}, в которую данные переменные не могут попадать по своему физическому смыслу.

Выражения (1.10) – (1.12) называются ограничениями задачи. Решение задачи (частный набор значений переменных x_i) называется допустимым, если оно одновременно удовлетворяет всем ограничениям задачи. Решение задачи называется оптимальным, если оно обеспечивает оптимум (в данном случае минимум) функции цели.

Будем считать, что функции $y, f_1, f_{2,\ldots,}f_n$ – непрерывные линейные функции, заданные на неотрицательной области евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Данные функции имеют место, когда перевозимый груз является жидкостью, сыпучим материалом, мелкими заготовками или мелкой неупакованной продукцией. Такой груз характеризуется параметрами, которые представляют собой вес, длину (погонные метры), площадь (квадратные метры), объем и т.п.

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \tag{1.13}$$

то модель такой транспортной задачи называется закрытой. В противном случае – открытой.

Теорема 1.1. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т.е. чтобы выполнялось равенство (1.13).

В случае превышения запаса над потребностью, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный (n+1)-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. При этом соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{i,n+1} = 0$ ($i = \overline{1,m}$). Получаемая задача будет уже транспортной задачей, для которой условие (1.13) выполняется.

Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный (m+1)-й пункт отправления с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. При этом соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{m+1,j} = 0$ ($j = \overline{1,n}$). Получаемая задача будет уже транспортной задачей, для которой условие (1.13) выполняется.

В дальнейшем будем рассматривать закрытую модель транспортной задачи. Если же модель конкретной задачи является открытой, то, исходя из сказанного выше, ее следует преобразовать так, чтобы выполнялось равенство (1.13).

В открытой модели область допустимых значений (при прочих равных условиях) значительно шире, поэтому целевая функция достигает лучших значений или, по крайней мере, не хуже.

1.3.3. Особенности решения закрытой транспортной задачи

Определение 1.1. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (1.10) и (1.11), определяемое матрицей $\mathbf{X}=[x_{ij}]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, называется *планом* транспортной задачи.

Определение 1.2. План $X^*=\left[x_{ij}^*\right]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, при котором функция (1.9) принимает свое минимальное значение, называется *оптимальным планом* транспортной задачи.

Число переменных x_{ij} в транспортной задаче с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно mn, а число уравнений в системах (1.10) и (1.11) равно $m+n$. Так как предполагается, что выполняется условие (1.13), то число линейно независимых уравнений равно $m+n-1$. Следовательно, опорный план транспортной задачи может иметь не более $m+n-1$ отличных от нуля неизвестных.

Определение 1.3. План $X^*=\left[x_{ij}^*\right]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ *является опорным невырожденным,* если в нем количество отличных от нуля компонентов в точности равно $m+n-1$, а если меньше – то *вырожденным*.

Для определения опорного плана существует несколько методов. Один из них – метод северо-западного угла – будет рассмотрен ниже.

Как и для всякой задачи линейного программирования, оптимальный план транспортной задачи является и опорным планом. Для определения оптимального плана транспортной задачи можно использовать дифференциальный алгоритм, симплекс-метод и другие универсальные методы. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ее ограничений (каждая неизвестная входит лишь в два уравнения систем (1.10) и (1.11), а коэффициенты при неизвестных равны единице) для определения оптимального плана транспортной задачи разработаны специальные методы. Один из них – метод потенциалов – будет рассмотрен в курсе.

Обычно исходные данные транспортной задачи записываются в виде табл.1.1.

Таблица 1.1 – Исходные данные транспортной задачи

Пункты отправления	Запасы	Пункты назначения					
		1	2	…	j	…	N
		Потребности					
		b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

1.3.4. Определение начального опорного плана транспортной задачи

Решение транспортной задачи начинают с нахождения какого-нибудь опорного плана. Для этого разработаны специфические методы. Один из них получил в литературе название "*метод северо-западного угла*". Иногда его называют также "*диагональным методом*", "*методом переходных ступеней*" и т.п..

Сущность метода состоит в том, что опорный план находят за $m+n-1$ шаг, на каждом из которых в таблице условий заполняют одну клетку. Заполнение одной клетки обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполняемая клетка), либо вывоз груза из одного из пунктов отправления (из того, в строке которого находится заполняемая клетка).

Согласно этому методу заполнение таблицы следует начинать с левого верхнего квадрата (северо-западного угла). С позиции этого квадрата сравнивают запас груза в первом пункте отправления с потребностью первого пункта назначения. Выбирают меньшую величину и записывают в данный квадрат, который с этого момента становится "*занятым*". Если в клетку записывается потребность пункта назначения, то из дальнейшего рассмотрения исключают соответствующий столбец таблицы и переходят в левую соседнюю клетку. Если в клетку записывается запас пункта отправления, то из дальнейшего рассмотрения исключают соответствующую строку таблицы и переходят в ния исключают соответствующую строку таблицы и переходят в соседнюю клетку, которая находится ниже заполненной.

В новой клетке для оставшейся части таблицы повторяют процедуру первого шага с учетом изменившегося запаса груза одного из отправителей или потребности в грузе одного из получателей в результате предыдущего шага.

После того, как проделаны $m+n-2$ описанных выше шагов, получают задачу с одним пунктом отправления и одним пунктом назначения. При этом остается свободной только одна клетка, а запасы оставшегося пункта отправления будут равны потребности оставшегося пункта назначения. Заполнив эту клетку, тем самым делают ($m+n-1$)-й шаг и получают искомый опорный план.

Алгоритм метода северо-западного угла в виде блок-схемы изображен на рис.2.1.

В алгоритме определения начального опорного плана исходными данными являются:

m – число пунктов отправления;

n – число пунктов назначения;

$\mathbf{a} = [a_i]$ – одномерный массив чисел, определяющих запасы груза в пунктах отправления;

$\mathbf{b} = [b_j]$ – одномерный массив чисел, определяющих запасы груза в пунктах отправления.

Единственным выходным данным в алгоритме является двумерный массив $\mathbf{X} = [x_{ij}]$, определяющий начальный опорный план транспортной задачи.

Назначение блоков схемы алгоритма:

блоки 2–5 – проверка условия разрешимости задачи: является ли математическая модель транспортной задачи закрытой;

блок 6 – выдача сообщения о нарушении условия разрешимости задачи, т.е. о необходимости приведения открытой математической модели к закрытой;

блоки 7–9 – двойной цикл подготовки массива **B** (обнуление массива);

блок 10 – задание начальных значений переменным Δa и Δb;

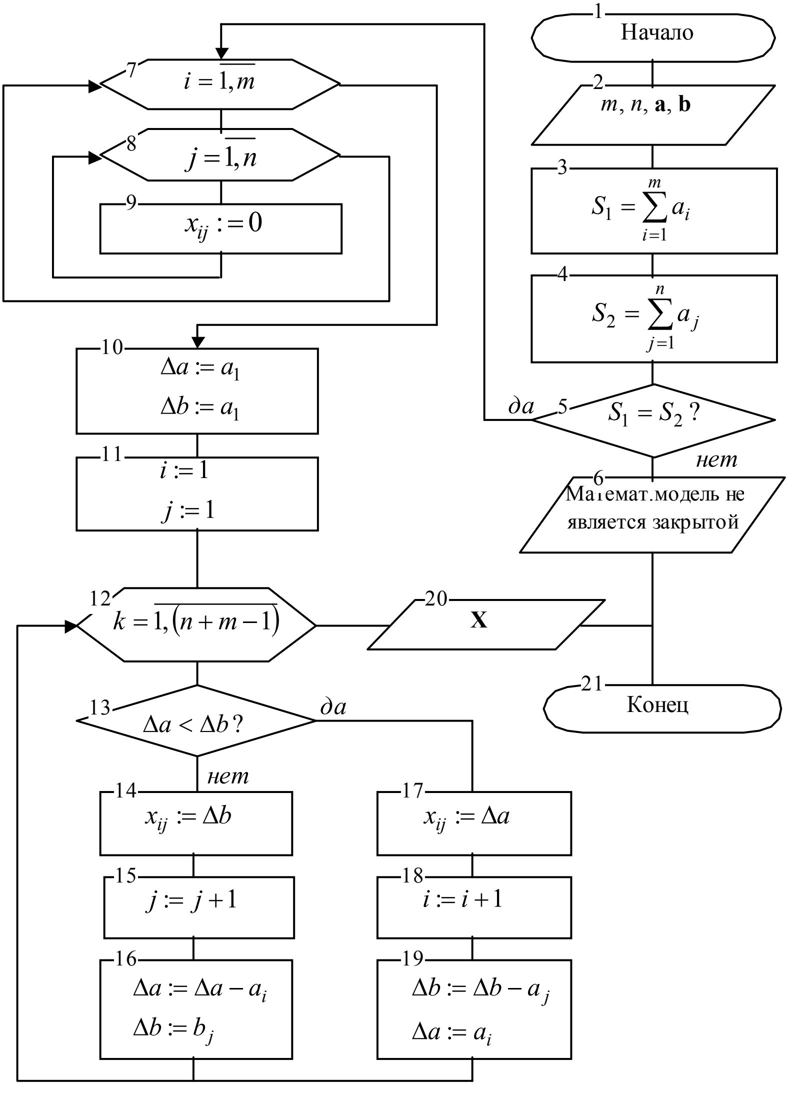


Рис.1.1. Схема алгоритма определения начального опорного плана в транспортной задаче методом северо-западного угла

блок 11 – задание начальных значений индексам элементов массива **X**;

блоки 12–19 – непосредственное формирование начального опорного плана;

блок 20 – вывод результата.

Следует заметить, что на некотором шаге (но не на последнем) может оказаться, что потребности в грузе очередного пункта назначения равны запасам очередного пункта отправления. В этом случае из дальнейшего рассмотрения исключают либо столбец, либо строку, т.е. только что-нибудь одно. Таким образом, либо запасы соответствующего пункта отправления, либо потребность соответствующего пункта назначения считают равными нулю. Этот нуль записывают в очередную заполняемую клетку.

Указанные выше условия гарантируют получение $m+n-1$ занятых клеток, в которых стоят компоненты опорного плана, т.е. гарантируют получение опорного плана транспортной задачи.

Опорный план перевозок должен отвечать следующим требованиям:

во-первых, количество занятых маршрутов (клеток) должно быть на единицу меньше суммы числа поставщиков m и числа потребителей n, т.е. равно $m+n-1$;

во-вторых, не должно быть ни одного занятого маршрута, который оказался бы единственным и в строке, и в столбце таблицы.

1.3.5. Определение оптимального опорного плана транспортной задачи

Для определения оптимального плана транспортной задачи разработано несколько методов. Наиболее часто *используется метод потенциалов.* Метод предполагает, что известен какой-либо опорный план. Его можно получить, например рассмотренным методом северо-западного угла. Исходный опорный план необходимо проверить на оптимальность.

Теорема 1.2. Если для некоторого опорного плана $X^* = \left[x^*_{ij}\right]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ транспортной задачи с заданными тарифами перевозок c_{ij} существуют такие числа $\alpha_i \ (i=\overline{1,m})$ и $\beta_j \ (j=\overline{1,n})$, что

$$\beta_i - \alpha_j = c_{ij} \qquad \text{при} \qquad x_{ij} > 0 \tag{1.14}$$

и $$\beta_i - \alpha_j \le c_{ij} \qquad \text{при} \qquad x_{ij} = 0 \tag{1.15}$$

для всех $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$, то $X^* = \left[x_{ij}^*\right]$ – оптимальный план.

Определение 1.4. Числа α_i $(i = \overline{1,m})$ и β_j $(j = \overline{1,n})$ называются *потенциалами* соответственно пунктов отправления и пунктов назначения.

Теорема 1.2 позволяет построить алгоритм нахождения решения транспортной задачи. Он состоит в следующем. Пусть найден опорный план транспортной задачи. Для каждого из пунктов отправления и назначения определяют потенциалы α_i $(i = \overline{1,m})$ и β_j $(j = \overline{1,n})$ из системы уравнений

$$\beta_i - \alpha_j = c_{ij}\,. \tag{1.16}$$

Так как число заполненных клеток равно n+m–1, то система (1.16) с n+m неизвестными содержит n+m–1 уравнений. Поскольку число неизвестных превышает на единицу число уравнений, одно из неизвестных следует положить равным произвольному числу, например $\alpha_1 = 0$, и найти последовательно из системы (1.16) значения остальных неизвестных.

После того, как все потенциалы найдены, для каждой из свободных клеток определяют числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$. Если среди чисел α_{ij} нет положительных, то найденный опорный план является оптимальным. Если же для некоторой свободной клетки $\alpha_{ij} > 0$, то проверяемый опорный план не является оптимальным, и необходимо перейти к новому опорному плану. Для этого рассматривают все свободные клетки, для которых $\alpha_{ij} > 0$, и выбирают ту, для которых число α_{ij} максимальное. Выбранную клетку следует заполнить.

Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объемы перевозок, записанных в ряде других занятых клетках и связанных с заполняемым *циклом*.

Определение 1.5. Циклом в таблице транспортной задачи называется замкнутая ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбов, причем в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое – в столбце.

Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается сама с собой, то точки самопересечения не являются вершинами. Примеры возможных циклов показаны на рис.1.2.

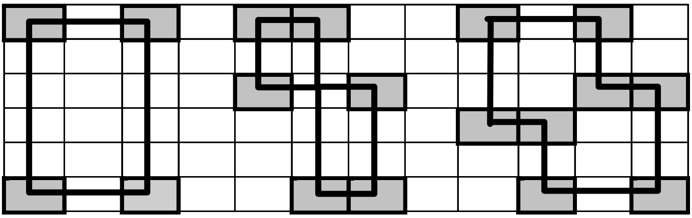


Рис.1.2

При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить лишь один цикл. После того как для выбранной свободной клетки он построен, следует перейти к новому опорному плану. Для этого необходимо переместить грузы в пределах клеток, образующих цикл. Такое перемещение производят по следующим правилам:

каждой из клеток, связанных циклом с выбранной свободной клеткой, приписывают знак “+” или “–“, причем свободной клетке – знак плюс , а всем остальным клеткам – поочередно знаки минус и плюс;

в свободную клетку переносят меньшее из чисел x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, и одновременно это число прибавляют к соответствующим числам, стоящим в “плюсовых” клетках, и вычитают из чисел, стоящих в “минусовых” клетках. Клетка, которая раннее была свободной, становится занятой, а “минусовая” клетка, в которой стояло минимальное число x_{ij}, становится свободной.

В результате указанных выше перемещений грузов в пределах клеток, связанных циклом с выбранной свободной клеткой, определяют новый опорный план транспортной задачи. Число занятых клеток остается равным n+m–1. Если в занятых “минусовых” клетках цикла имеется два и более одинаковых минимальных чисел x_{ij}, то освобождают только лишь одну из таких клеток, а остальные оставляют занятыми с нулевыми поставками.

Полученный новый опорный план транспортной задачи проверяют на оптимальность. Для этого определяют потенциалы пунктов отправления и назначения и находят числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$ для всех свободных клеток. Если среди этих чисел не окажется положительных, то это означает, что новый опорный план является оптимальным. Если же имеются положительные числа, то следует перейти к новому опорному плану. В результате пошагового процесса после конечного числа переходов получают оптимальный план задачи.

Таким образом, процесс нахождения решения транспортной задачи методом потенциалов включает следующие этапы:

1-й этап. Находят опорный план.

2-й этап. Находят потенциалы пунктов отправления и назначения.

3-й этап. Определяют числа α_{ij} для каждой свободной клетки. Если среди них нет положительных, то получен оптимальный план транспортной задачи, в противном случае переходят к новому опорному плану.

4-й этап. Выбирают среди положительных чисел α_{ij} максимальное, строят для соответствующей свободной клетки цикл пересчета и производят сдвиг по циклу, получая при этом новый опорный план. Далее переходят ко 2-му этапу.

Рассмотрим пример решения транспортной задачи методом потенциалов.

1.3.6. Пример решения транспортной задачи методом потенциалов

Пример 1.1. Три растворобетонных завода снабжаются цементом из четырех складов. Спрос заводов b_j соответственно равен 280, 90 и 180 *тыс.т./мес.* Пропускная способность складов a_i соответственно равна 200, 150, 80 и 120 *тыс.т./мес.* Расстояние перевозки (в *км*) с i-го склада на j-й растворобетонный завод представлены в матрице $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 11 \end{bmatrix}$. Требуется составить план перевозок цемента со складов на заводы, который удовлетворял бы пропускной способности складов и потребностям заводов, а суммарный пробег грузового транспорта был бы минимальным.

Решение. Обозначим через x_{ij} – количество цемента, которое ежемесячно следует доставлять на *j*–й завод с *i*–го склада. Тогда математическая модель задачи имеет вид:

$$y = x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 6x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + 2x_{31} + 7x_{32} +$$

$$+ 4x_{33} + 4x_{41} + x_{42} + 11x_{43} \to \min_{x_{ij} \in \Omega}, \quad (1.17)$$

$$\Omega: \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 280, \quad (1.18)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 90, \quad (1.19)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 180, \quad (1.20)$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200, \quad (1.21)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150, \quad (1.22)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 80, \quad (1.23)$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 120, \quad (1.24)$$

$$x_{ij} \geq 0. \quad (1.25)$$

Здесь (1.17) – целевая функция, (1.18) – (1.20) – ограничения задачи, определяющие месячные запасы цемента на складах, (1.21) – (1.24) – ограничения задачи, определяющие месячную потребность в цементе на заводах, (1.25) – ограничение, определяющее то, что поставки цемента на заводы не могут иметь отрицательных значений.

<u>1-й шаг.</u> *<u>1-й этап.</u>* Используя метод северо-западного угла, найдем опорное решение транспортной задачи (1.17) – (1.25).

Согласно этому методу заполняем таблицу, начиная с левого верхнего квадрата. Сравниваем запас груза в первом пункте отправления (200 *тыс.т./мес.*) с потребностью первого пункта назначения (280 *тыс.т./мес.*). Выбираем меньшую величину (200) и записываем ее в данный квадрат. Поскольку весь запас в первом пункте отправления исчерпан, то из дальнейшего рассмотрения исключаем первую строку и переходим в соседнюю клетку, которая находится ниже заполненной.

В новой клетке для оставшейся части таблицы повторяем процедуру заполнения верхней левой клетки, но с учетом того, что потребность первого пункта назначения уменьшилась на 200 *тыс.т./мес.* и стала равной 80 *тыс.т./мес.* Т.е. сравниваем запас второго пункта отправления (150 *тыс.т./мес.*) с новой потребностью первого пункта назначения (80 *тыс.т./мес.*). Выбираем меньшую (80) и записываем ее в новую клетку. Поскольку потребность в грузе в первом пункте назначения полностью удовлетворена, то из дальнейшего рассмотрения исключаем первый столбец и переходим в соседнюю клетку, которая находится справа от только что заполненной.

Для новой верхней левой клетки оставшейся части таблицы повторяем процедуру заполнения с учетом изменения запаса во втором пункте отправления на 80 *тыс.т./мес.* И так до тех пор, пока не будет заполнено $m+n-2$ клетки. Последняя ($m+n-2$)-я клетка заполняется механически – в нее записывается остаточная потребность последнего пункта назначения или остаточный запас последнего пункта отправления. В условиях задачи это величина 120. Все промежуточные результаты по нахождению начального опорного плана $\mathbf{X}_0$-$=\begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 80 & 70 & 0 \\ 0 & 20 & 60 \\ 0 & 0 & 120 \end{bmatrix}$ отражены в табл. 1.2. Эти результаты в таблице выделены полужирным шрифтом.

Для начального опорного плана вычисляем значение целевой функции (1.17):

$$y_0 = 1 \cdot 200 + 6 \cdot 80 + 8 \cdot 70 + 7 \cdot 20 + 4 \cdot 60 + 11 \cdot 120 = 2940$$

тыс.т./мес.

Это значение будет использовано на последующих шагах для контроля продвижения к оптимуму. Значение целевой функции должно последовательно уменьшаться с каждым шагом.

Таблица 1.2

<table>
<tr><td rowspan="4">Пункт отправ-ления</td><td rowspan="4">Запасы груза</td><td colspan="3">Пункты назначения</td><td rowspan="4">Потенциал пункта отправ-ления α_i</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Потребность</td></tr>
<tr><td>280</td><td>90</td><td>180</td></tr>
<tr><td>1</td><td>200</td><td>1 200</td><td>5</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>150</td><td>6 80</td><td>8 70</td><td>9</td><td>-5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>80</td><td>2</td><td>7 – 20</td><td>4 + 60</td><td>-4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>120</td><td>4</td><td>1 +</td><td>11 – 120</td><td>-11</td></tr>
<tr><td colspan="2">Потенциал пункта назначения β_j</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>

<u>*2-й этап.*</u> Найденный опорный план проверяем на оптимальность. В связи с этим находим потенциалы пунктов отправления и назначения из системы

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_2 - \alpha_2 = 8, \quad \beta_3 - \alpha_3 = 4,$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 6, \quad \beta_2 - \alpha_3 = 7,$$

$$\beta_3 - \alpha_4 = 11,$$

содержащей шесть уравнений с семью неизвестными. Полагая $\alpha_1 = 0$, находим $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_3 = -4$, $\beta_3 = 0$, $\alpha_3 = -11$. Записываем найденные потенциалы в табл.1.2.

3-й этап. Для каждой свободной клетки вычисляем числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$: $\alpha_{12} = -2$, $\alpha_{13} = -3$, $\alpha_{23} = -4$, $\alpha_{31} = 3$, $\alpha_{41} = 8$, $\alpha_{42} = 13$.

Записываем найденные числа в соответствующие свободные клетки табл.1.2 и заключаем их в рамочки, чтобы отличать их от другой информации в таблице. Так как среди чисел α_{ij} имеются положительные, то опорный план $\mathbf{X}_0$ не является оптимальным.

4-й этап. Среди положительных чисел α_{ij} выбираем максимальное: $\alpha_{42} = 13$. Для соответствующей свободной клетки строим цикл, а саму клетку помечаем знаком «+». В табл.1.2 занятые клетки, составляющие цикл, выделены серым фоном. Затем помечаем знаками «–» и «+» поочередно остальные клетки цикла, следуя вдоль ломаной линии цикл.

Наименьшим из чисел x_{ij} в «минусовых» клетках является x_{32} =20. Данная клетка становится свободной, а остальные клетки цикла меняют свои значения следующим образом: x_{42} =20, x_{43} =120-20=100, x_{33} =60+20=80.

В результате проделанных преобразований получаем новый опорный план $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 80 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 20 & 100 \end{bmatrix}$. При таком опорном плане функция цели (1.17) становится равной 2680 *тыс.т./мес.*, что меньше исходного значения 2940 *тыс.т./мес.*

На этом заканчивается 1-й шаг оптимизации. На следующем шаге процедура 1-го шага повторяется, но без 1-го этапа.

2-й шаг. Анализируем новый опорный план (см. табл.1.3) на оптимальность. Снова находим потенциалы пунктов отправления и пунктов назначения, для чего составляем следующую систему уравнений:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \qquad \beta_2 - \alpha_2 = 8, \qquad \beta_2 - \alpha_4 = 1,$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 6, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4, \qquad \beta_3 - \alpha_4 = 11.$$

Полагая $\alpha_1 = 0$, находим $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_4 = 2$, $\beta_3 = 13$, $\alpha_3 = 9$. Для каждой свободной клетки вычисляем числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -2$, $\alpha_{13} = 10$, $\alpha_{23} = 9$, $\alpha_{31} = -10$, $\alpha_{32} = -13$, $\alpha_{41} = -5$.

Так как среди чисел α_{ij} имеются положительные ($\alpha_{13} = 10$, $\alpha_{23} = 9$), то опорный план $\mathbf{X}_1$ не является оптимальным.

Таблица 1.3

Пункт отправления	Запас груза	Пункты назначения			Потенциал пункта отправления α_i
		1	2	3	
		Потребность			
		280	90	180	
1	200	1 – **200**	5	3 +	0
2	150	6 + **80**	8 – **70**	9	-5
3	80	2	7	4 **80**	9
4	120	4	1 + **20**	11 – **100**	2
Потенциал пункта назначения β_j		1	3	13	

Среди положительных чисел α_{ij} выбираем максимальное: $\alpha_{13} = 10$. Для соответствующей свободной клетки строим цикл, а саму клетку помечаем знаком «+». В табл.1.3 занятые клетки, составляющие цикл, выделены серым фоном. Затем помечаем узловые клетки цикла поочередно знаками «–» и «+».

Наименьшим из чисел x_{ij} в «минусовых» клетках является x_{23} =70. Данная клетка становится свободной, а остальные клетки цикла меняют свои значения следующим образом: x_{11} =200–70=130, x_{13} =70, x_{21} =80+70=150, x_{42} =20+70=90, x_{43} =100–70=30.

В результате проделанных преобразований получаем новый опорный план $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 130 & 0 & 70 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 90 & 30 \end{bmatrix}$. При таком опорном плане функция цели (1.17) становится равной 1980 *тыс.т./мес.*, что значительно меньше предыдущего значения 2680 *тыс.т./мес.*

3-й шаг. Анализируем новый опорный план (см. табл.1.4) на оптимальность. Снова находим потенциалы пунктов отправления и пунктов назначения, для чего составляем следующую систему уравнений:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \qquad \beta_1 - \alpha_2 = 6, \qquad \beta_2 - \alpha_4 = 1,$$
$$\beta_3 - \alpha_1 = 3, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4, \qquad \beta_3 - \alpha_4 = 11.$$

Полагая $\alpha_1 = 0$, находим $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_3 = 4$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = -8$, $\beta_2 = -7$. Для каждой свободной клетки вычисляем числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -12$, $\alpha_{22} = -10$, $\alpha_{23} = -1$, $\alpha_{31} = -1$, $\alpha_{32} = -14$, $\alpha_{41} = 5$. Так как среди чисел α_{ij} имеется одно положительное ($\alpha_{41} = 5$), то опорный план $\mathbf{X}_2$ не является оптимальным.

Таблица 1.4

Пункт отправления	Запасы груза	Пункты назначения			Потенциал пункта отправления α_i
		1	2	3	
		Потребность			
		280	90	180	
1	200	1 – **130**	5	3 + **70**	0
2	150	6 **150**	8	9	–5
3	80	2	7	4 **80**	0
4	120	4 +	1 **90**	11 – **30**	–8
Потенциал пункта назначения β_j		1	–7	3	

Для соответствующей свободной клетки (нижней, левой) строим цикл, а саму клетку помечаем знаком «+». В табл.1.4 занятые клетки, составляющие цикл, выделены серым фоном. Затем помечаем узловые клетки цикла поочередно знаками «–» и «+». Наименьшим из чисел x_{ij} в «минусовых» клетках является x_{43} =30. Данная клетка становится свободной, а остальные клетки цикла меняют свои значения следующим образом: x_{11} =130–30=100, x_{13} =70+30=100, x_{14} =30.

В результате проделанных преобразований получаем новый опорный план $\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 100 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 30 & 90 & 0 \end{bmatrix}$. При таком опорном плане функция цели (1.17) становится равной 1830 *тыс.т./мес.*, что меньше предыдущего значения 1980 *тыс.т./мес.*

4-й шаг. Анализируем новый опорный план (см. табл.1.5) на оптимальность. Снова находим потенциалы пунктов отправления и пунктов назначения, для чего составляем следующую систему уравнений:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \qquad \beta_1 - \alpha_2 = 6, \qquad \beta_1 - \alpha_4 = 4,$$
$$\beta_3 - \alpha_1 = 3, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4, \qquad \beta_2 - \alpha_4 = 1.$$

Полагая $\alpha_1 = 0$, находим $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = -3$, $\beta_2 = -2$. Для каждой свободной клетки вычисляем числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -7$, $\alpha_{22} = -4$, $\alpha_{23} = -1$, $\alpha_{31} = 0$, $\alpha_{32} = -8$, $\alpha_{41} = -5$. Так как среди чисел α_{ij} нет строго положительных, то опорный план $\mathbf{X}_3$ является оптимальным.

Таблица 1.5

Пункт отправ-ления	Запасы груза	Пункты назначения			Потенциал пункта отправ-ления α_i
		1	2	3	
		Потребность			
		280	90	180	
1	200	1 **100**	5	3 **100**	0
2	150	6 **150**	8	9	–5

3	80	2	7	4 **80**	**−1**
4	120	4 **30**	1 **90**	11	–3
Потенциал пункта назначения β_j		1	–2	3	

Тема 1.4. Информационные технологии в решении задач математического программирования

1.4.1. Выбор информационной технологии для решения задач математического программирования

Решение любой задачи математического программирования традиционным ручным способом (без привлечения средств вычислительной техники) требует от экономистов и менеджеров больших затрат сил и времени для осуществления многошаговых процессов приближения к оптимуму. Использование микрокалькуляторов может значительно ускорить процесс решения, но все равно не может гарантировать быстрого и надежного отыскания решения. Ситуация резко меняется, если для решения задач математического программирования использовать современные информационные технологии. Существует ряд мощных информационных систем, которые значительно снижают риск получения ошибочного результата и на несколько порядков сокращающих время решения задач.

Использование современных информационных систем для решения задач математического программирования требует от своих пользователей только правильного составления математической модели задачи и ее ввода в компьютер. Если раньше экономисту надо было детально владеть методами решения различных классов экстремальных задач, то теперь он может не утруждать себя изучением этих методов, а сосредоточить свое внимание на правильности постановки задачи. Если математическая постановка задачи неадекватна ее условию, то никакие методы и никакая вычислительная техника не помогут ее постановщику.

Для решения задач математического программирования с экономическим уклоном наиболее удачным является использование современной информационной системы *Microsoft Excel* версии 7.0 и выше. Объясняется это, прежде всего, тем, что данная система является программным инструментом для решения других (не связанных с поиском экстремума) задач экономики. Большим достоинством системы является ее универсальность. Практически любые типы задач математического программирования могут быть успешно решены с помощью *Microsoft Excel*. Здесь следует особенно подчеркнуть, что математические модели могут носить дискретный характер. Однако при большой размерности задачи ее решение с помощью данной системы может оказаться неэффективным из-за больших временных затрат. В этом случае при непрерывном характере математической модели задачи можно использовать информационную систему *MathCAD 2000.*

Выбор этих систем в настоящем пособии в качестве инструментальных программных средств для решения задач математического программирования во многом обусловлен широкой их популярностью и доступностью.

1.4.2. Технология решения транспортной задачи с помощью информационной системы Microsoft Excel

Информационная система *Microsoft Excel* имеет встроенную программу *Solver* (Поиск решения), которая представляет собой мощный вспомогательный инструмент для выполнения сложных вычислений, в том числе и решения большинства задач математического программирования. Рассмотрим использование программы *Solve* на примере решения транспортной задачи (1.17) – (1.25).

Исходные данные для программы *Solve* должны быть представлены в виде электронной таблицы, которая содержит четыре типа областей:

область *переменных* задачи, будем выделять ее желтым цветом;

область *заданных параметров* задачи, будем выделять ее светлым зеленым фоном;

область *промежуточных результатов*, будем выделять ее голубым фоном;

область *целевой функции,* будем выделять ее красным фоном.

Область переменных задачи – это обязательная область, которая по своей конфигурации соответствует форме матрицы переменных **X.** Каждая ячейка области соответствует одному элементу x_{ij} матрицы **X.** Переменные могут иметь начальные значения, но *не* обязательно. В случае их отсутствия программа сама их введет. Ячейки переменных не должны содержать формул.

Область исходных данных задачи – это обязательная область, которая содержит константы, заданные условием задачи. Для транспортной задачи эта область имеет три составляющие:

подобласть для матрицы расстояний (тарифов) $\mathbf{C}=[c_{\mathrm{ij}}]$;

подобласть для вектора запасов груза в пунктах отправления $\mathbf{a}=[a_{\mathrm{i}}]$;

подобласть для вектора потребностей в грузе в пунктах назначения $\mathbf{b}=[b_{\mathrm{j}}]$.

Ячейки всех подобластей не должны содержать формул. Все исходные данные должны быть введены в эти подобласти до начала решения задачи.

Область промежуточных результатов содержат формулы, отражающие зависимости между данными таблицы. Для транспортной задачи область распадается на три подобласти:

подобласть $\mathbf{C}\times\mathbf{X}$ для произведений элементов матрицы $\mathbf{X}$ на соответствующие элементы матрицы $\mathbf{C}$**.** Необязательная область. При ее наличии каждая ячейка содержат формулу, определяющую произведение $x_{\mathrm{ij}}c_{\mathrm{ij}}$.

подобласть функций ограничений типа (1.10), определяющих запасы в пунктах отправления. Это обязательная область, каждая ячейка которой содержит формулу для определения запаса груза в соответствующем пункте отправления $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$;

подобласть функций ограничений типа (1.11), определяющих потребность в грузе в пунктах назначения. Это обязательная область, каждая ячейка которой содержит формулу для определения потребности соответствующего пункта назначения $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$.

Область целевой функции состоит из одной (и только одной) ячейки, в которой записана формула для определения критерия (1.9), т.е. формула двойной суммы $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ (при наличии области $\mathbf{C}\times\mathbf{X}$**)** или специальная функция СУММПРОИЗВ (при отсутствии области $\mathbf{C}\times\mathbf{X}$**)**.

Вопрос использовать или не использовать область $\mathbf{C}\times\mathbf{X}$ для решения транспортной задачи решает сам пользователь. В случае ее наличия при малой размерности транспортной задачи усиливается наглядность ее решения, при большой – ухудшается.

Следует отметить, что если транспортная задача имеет открытую модель, то при решении нет необходимости приводить ее к закрытой модели, как это имеет место при ручном счете. Кроме того, нет также необходимости в процедуре поиска начального опорного плана.

1.4.3. Пример решения транспортной задачи с помощью информационной системы Microsoft Excel

На рис.1.3 показано распределение областей электронной таблицы и их заполнение исходными данными в условиях ***прим.1.1***. Как видно из таблицы, область переменных задачи заполняется нулями, а подобласти исходных данных заполняются данными, взятыми из условия задачи.

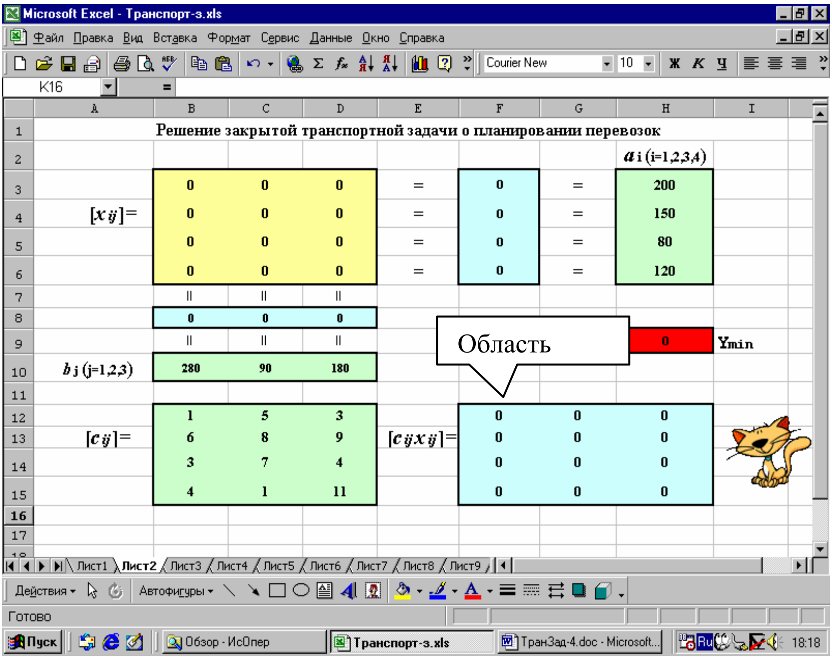


Рис.1.3

Область промежуточных результатов заполняется следующим образом:

в ячейке $F$3 записывается формула =СУММ(B3:D3) и копируется в ячейки $F$4: $F$6;

в ячейке $B$8 записывается формула =СУММ(B3:B6) и копируется в ячейки $C$8: $B$8;

в ячейке $F$12 записывается формула =B3*B12 и копируется в ячейки $G$12: $H$12, а затем ячейки $F$12:$H$12 копируются в ячейки $F$13: $H$15.

Наконец, в ячейку целевой функции $H$9 при наличии области $\mathbf{C}\times\mathbf{X}$ записывается формула =СУММ(F12:H15), а при отсутствии – формула =СУММПРОИЗВ(B12:D15;B3:D6).

Вся остальная текстовая информация, которая представлена в электронной таблице (рис.1.3), не является обязательной. Ее наличие или отсутствие никак не влияет на решение задачи.

Дальнейшая подготовка к запуску процесса решения задачи связано непосредственно с программой *Solve* ,которая инициализируется командой *Сервис / Поиск решения.* При этом на экране появляется диалоговое окно программы *Solve,* требующее установить параметры решения задачи. На рис.1.4 показано диалоговое окно программы с необходимыми установками.

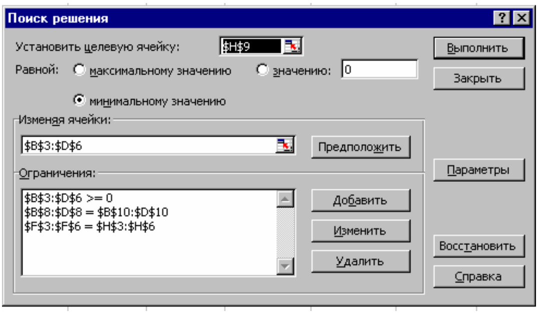


Рис.1.4. Диалоговое окно программы *Solve*

Для транспортной задачи из ***прим.1.1*** *установки диалогового окна* должны быть следующими:

в качестве целевой ячейки указывается ячейка $H$9;

выбирается селекторная кнопка «минимальное значение»;

в окне «Изменяя ячейки» указывается диапазон клеток \$B\$3:\$D\$6;

в окне «Ограничения» последовательно указываются ограничения: \$B\$3:\$D\$6>=0; \$B\$8:\$D\$8=\$B\$10:\$D\$10; \$F\$3:\$F\$6=\$H\$3:\$H\$6.

Далее следует запустить процесс вычисления нажатием кнопки «Выполнить» в диалоговом окне. Отдельные шаги процесса отображаются в строке состояния. После завершения поиска решения новые значения будут вставлены в электронную таблицу, а на экране появится новое диалоговое окно, содержащее информацию о завершении процесса поиска решения. В этом окне следует выбрать опцию «Сохранить найденное решение». В результате выбора новые значения останутся в таблице. В противном случае программа восстановит значения, которые были в таблице до нажатия кнопки «Выполнить».

Для транспортной задачи из ***прим.1.1*** окончательный вид электронной таблицы представлен на рис.1.5. Здесь в целевой ячейке находится оптимальное значение критерия оптимальности – число 1830, а в области переменных (ячейки \$B\$3:\$D\$6) – искомые значения x_{ij}^*, которые совпадают с опорным планом $\mathbf{X}_3$, полученным при ручном счете методом потенциалов.

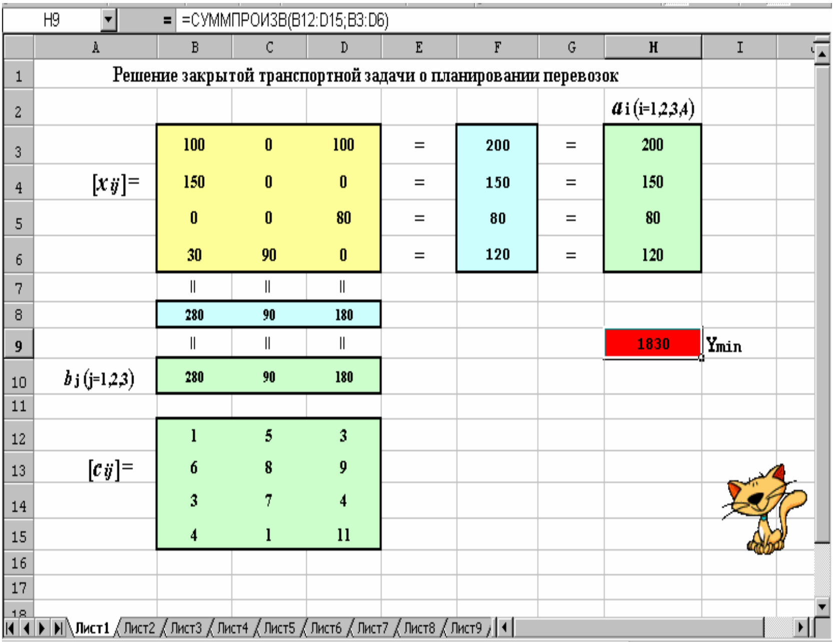


Рис.1.5

1.4.4. Технология решения транспортной задачи с помощью информационной системы MathCAD 2000

Информационная система *MathCAD 2000* также может быть использована для решения экстремальных задач с непрерывным характером математической модели. Для этой цели используют специальные вычислительные блоки системы *MathCAD 2000: Given – minimize* или *Given – maximize*.

Рассмотрим использование информационной системы *MathCAD 2000* на примере решения конкретной транспортной задачи. Поскольку с данной системой студенты могут быть не знакомы, то рассмотрение будет более подробным.

Пример 1.2. Пусть имеется три пункта отправления некоторого однородного ресурса **A_1, A_2, … , A_3** и три пункта назначения ресурса **B_1, B_2, … , B_3**. Обозначим количество ресурса в i–м пункте отправления через a_i (i= 1,2,3), а потребность каждого j–го пункта назначения через b_j (j=1,2,3). Известны затраты c_{ij} (см. табл. 2) на перевозку одной единицы ресурса из каждого i–го пункта отправления в каждый j–й пункт назначения. Требуется определить: какое количество ресурса x_{ij} необходимо поставить (перевезти) из каждого i–го пункта отправления в каждый j–й пункт назначения, чтобы обеспечить отправку всего ресурса всех поставщиков всем потребителям с минимальными суммарными затратами на перевозку.

Таблица 1.6

Пункты отправления	Затраты C_{ij} на перевозку одной единицы ресурса из каждого i–го пункта отправления в каждый j–й пункт назначения в *ус.ед.*			Запасы ресурса
	B_1	B_2	B_3	
A_1	70	38	24	14
A_2	58	18	56	20
A_3	19	10	100	26
Потребность в ресурсе	30	22	15	

Последовательность решения

Прежде всего, введем пояснительный текст в рабочем листе. Для этого установим курсор (визир – красный крестик) в место ввода. Затем выберем (щелчком мыши) пункт ***Insert*** (Вставка) главного меню *MathCAD*. В появившемся падающем меню выберем пункт ***Text Region*** (Текстовая область) или в месте расположения курсора нажмем комбинацию клавиш ***Shift+"*** (двойная кавычка). В обоих случаях появится шаблон, указывающий начало ввода текста. По мере ввода пояснительного текста «1. Целевая функция: » текстовая область будет автоматически увеличиваться. По окончании этой операции выведем курсор (маркер ввода – красная вертикальная черточка) за рамку области.

Зададим критерий оптимизации – целевую функцию. Для этого установим курсор в место ввода математического выражения. Начнем с нажатия соответствующих клавиш. Сначала зададим имя критерия оптимизации с аргументами, записанными через запятые и заключенными в скобки:

$$Y(X11,X12,X13,X21,X22,X23,X31,X32,X33)$$

Далее нажмем комбинацию клавиш ***Shift+:*** (двоеточие) для получения знака присваивания **:=** . На месте правой метки расположим выражение критерия оптимизации. В результате проведенных действий получим на рабочем листе целевую функцию:

$$Y(X11,X12,X13,X21,X22,X23,X31,X32,X33):=70\cdot X11+38\cdot X12+24\cdot X13\ldots$$
$$+58\cdot X21+18\cdot X22+56\cdot X23\ldots$$
$$+19\cdot X31+10\cdot X32+100\cdot X33\ .$$

Примечание. Чтобы перенести на следующую строчку многочлен, состоящий из нескольких слагаемых, достаточно нажать комбинацию клавиш ***Ctrl+Enter***.

Аналогично вводятся пояснительный текст «2. Начальные приближения: » и сами начальные приближения:

$$X11:=0\ \ X12:=0\ \ X13:=0\ \ X21:=0\ \ X22:=0\ \ X23:=0\ \ X31:=0\ \ X321:=0\ \ X33:=0.$$

Для решения задачи используем блок функции ***Given…Minimize.*** С этой целью нужно:

ввести, если необходимо, комментарий, нажав комбинацию клавиш ***Shift+"***;

ввести ключевое слово ***Given***;

ввести (необязательно) пояснительный текст «3. Система ограничений: »;

ввести систему ограничений (при этом необходимо использовать жирный знак равенства, вызвав его нажатием комбинаций клавиш ***Ctrl***+=):

$$X11+X12+X13=14 \qquad X21+X22+X23=20 \qquad X31+X32+X33=26$$

$$X11+X21+X31=30 \qquad X12+X22+X32=22 \qquad X13+X23+X33=8;$$

ввести (необязательно) пояснительный текст «4. Граничные условия: »;

ввести граничные условия (при необходимости использовать знак больше или равно «$\geq$» на панели инструментов ***Boolean***)

$$X11\geq 0 \quad X12\geq 0 \quad X13\geq 0 \quad X21\geq 0 \quad X22\geq 0 \quad X23\geq 0$$

$$X31\geq 0 \quad X32\geq 0 \quad X33\geq 0\ ;$$

ввести шаблон присваивания **:=** (двоеточие и знак равенства);

ввести в левую метку шаблона вектор искомых переменных; а в правую – имя функции ***Minimize*** с искомыми параметрами:

$$\begin{bmatrix} X11 \\ X12 \\ X13 \\ X21 \\ X22 \\ X23 \\ X31 \\ X32 \\ X33 \end{bmatrix} := Minimize(Y, X11, X12, X13, X21, X22, X23, X31, X32, X33);$$

вывести результат расчета:

$$\begin{bmatrix} X\ 11 \\ X\ 12 \\ X\ 13 \\ X\ 21 \\ X\ 22 \\ X\ 23 \\ X\ 31 \\ X\ 32 \\ X\ 33 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 26 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

ввести пояснительный текст «5. Определить экстремум функции:»;

ввести целевую функцию *(Y,X11,X12,…) =* .

Вид экрана с последовательностью решения транспортной задачи с использованием блока ***Given*****–** ***minimize*** показан на рис.1.6.

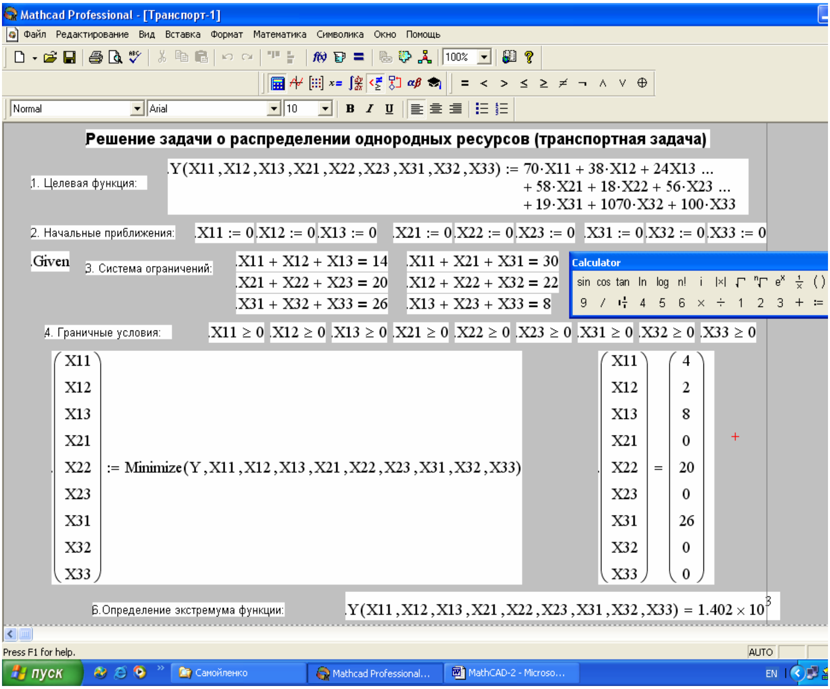


Рис.1.6

Оптимальное распределение однородных ресурсов зафиксировано в векторе (X11,X12,…). Из полученного результата видно, что X11=4, X12=2, X13=81, X21=0, X22=20, X23=0, X31=26, X32=0 и X33=0. Такое распределение ресурса обеспечит минимальные суммарные затраты в размере $1402x10^3$ *ус.ед.*

Тема 1.5. Разновидности транспортных задач

Рассмотренная математическая модель (1.9) – (1.12) является классической моделью транспортной задачи. В реальной практике экономиста и менеджера, как правило, транспортная задача встречается в несколько другой постановке. Математическая модель реальной транспортной задачи может отличаться от классической или видом целевой функции, или видом ограничений, или характером переменных, или любым сочетанием перечисленных отличий одновременно.

Рассмотрим несколько модификаций транспортной задачи.

1.5.1. Целочисленная транспортная задача

Прежде всего, следует отметить, что переменные в реальных задачах, как правило, имеют целочисленный характер. Целочисленные переменные имеют место, когда перевозимый груз представляет собой счетное множество крупных заготовок или комплектующих, неделимых продуктов производства, упакованных сыпучих материалов и т.п. Объем такого груза характеризуется величиной, выражаемой в штуках, упаковках, партиях и т.п.

Тогда математическая постановка транспортной задачи планирования перевозок принимает вид:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min_{x_{ij}\in\Omega}, \tag{12.6}$$

$$\Omega: \quad f_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.27}$$

$$f_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.28}$$

$$x_{ij} \ge 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.29}$$

$$x_{ij} = \text{int}; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.30}$$

Математическая модель целочисленной транспортной задачи (1.26) – (1.30) отличается от ранее рассмотренной математической модели непрерывной транспортной задачи (1.9) – (1.12) дополнительным ограничением на целочисленность неизвестных x_{ij} (1.30). Это влечет за собой наложение ограничения целочисленности на функции $f_1, f_{2,\dots,}$ $f_{n+m.}$

Следует заметить, что в общем случае условие целочисленности может накладываться и на значения функции цели y.

Целочисленная транспортная задача может быть с успехом решена с помощью рассмотренного в курсе метода потенциалов, поскольку вычислительные процедуры последнего включают только математические операции сложения и вычитания, не приводящие к нарушению требования целочисленности на результат решения.

1.5.2. Транспортная задача о распределении выпуска продукции

При комплексном решении проблемы производства и реализации продукции возникает задача, которая заключается в определении такого плана выпуска и перевозок готовой продукции, при котором достигаются минимальные совокупные затраты на ее изготовление и доставку потребителям.

Для решения данной задачи рассматривается полная себестоимость производства единицы продукции на каждом предприятии (s_i) и транспортные издержки (s_{ij}), которые зависят от типа применяемых транспортных средств и районов расположения заводов-изготовителей и потребителей.

Математическая модель такой задачи имеет вид:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (s_i + s_{ij}) \cdot x_{ij} \to \min_{x_{ij} \in \Omega}, \tag{1.31}$$

$$\Omega: \quad f_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.32}$$

$$f_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.33}$$

$$x_{ij} \ge 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.34}$$

$$x_{ij} = \text{int}; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.35}$$

Если по условию задачи требуются еще капитальные вложения в подвижной состав, то показателем эффективности служат приведенные затраты и целевая функция (1.31) будет иметь вид:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (s_i + s_{ij} + E_n k_i) \cdot x_{ij} \to \min, \tag{1.36}$$

где E_n – нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений; k_i – удельные капитальные вложения, приходящиеся на единицу перевозок.

Делая подстановку $c_{ij} = s_i + s_{ij\,i}$ в целевую функцию (1.31) и подстановку $c_{ij} = s_i + s_{ij} + E_n k_i$ в целевую функцию (1.36), задача (1.31) – (1.35) и задача (1.36), (1.32) – (1.35) соответственно сводятся к классической транспортной задаче, которая может быть решена методом потенциалов.

1.5.3. Распределительная транспортная задача о выборе средств доставки груза

Содержательная постановка задачи. Пусть через $j=1,2,\ldots,n$

обозначены грузообразующие пункты с объемами груза a_j соответственно. Имеется m средств доставки груза (видов транспорта). Грузоподъемность i–го средства доставки составляет p_i, а наличный его парк равен b_i, $i=1,2,...,m$. Грузы подлежат доставке в один центральный пункт (склад). Затраты при осуществлении одной единицей i–го средства доставки от j–го пункта до склада равны c_{ij}. Требуется составить наиболее экономичный план доставки.

Математическая модель задачи. Обозначим через x_{ij} количество средств доставки i–го типа, отправляющегося из j–го пункта. Тогда математическая модель распределительной транспортной задачи о выборе транспортных средств имеет вид:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min_{x_{ij}\in\Omega}, \qquad (1.37)$$

$$\Omega: \quad \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \ge a_j, \quad j=\overline{1,n}, \qquad (1.38)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (1.39)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (1.40)$$

$$x_{ij} = \text{int}, \quad i=\overline{1,m}, \quad i=\overline{1,m}. \qquad (1.41)$$

Целевая функция (1.37) определяет суммарные затраты на доставку груза на центральный склад. Выражение (1.38) указывает на необходимость вывоза всего груза с грузообразующих пунктов. Ограничение (1.39) указывает на то, что количество используемых средств доставки не должно превышать их наличный парк.

Появление параметра p_i в системе ограничений (1.38) препятствует сведению математической модели задачи к модели классической. Поэтому решать ее методом потенциалов не представляется возможным. Решение данной задачи классическими методами линейного программирования также не представляется возможным из-за целочисленности переменных x_{ij}. Решение задачи можно получить методом отсечения (путем ввода в задачу дополнительных ограничений в виде неравенств Гомори), однако процедура решения резко усложняется. Поэтому решение задачи наиболее целесообразно возложить на программу *Solver* (Поиск решения) информационной системы *Microsoft Excel.*

1.5.4. Транспортная задача о двухэтапной перевозке груза

Содержательная постановка задачи. Однородный груз требуется доставить из m пунктов отправления в n пунктов назначения. При доставке в пункты назначения грузы могут быть сначала доставлены на p перевалочных пунктов. Заданы стоимости перевозок c_{ij} из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения и перевалочный пункт, а также стоимости перевозки из каждого перевалочного пункта в каждый пункт назначения.

Математическая модель задачи. Обозначим:

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, $i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$;

c_{ik} – стоимость перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в k-й перевалочный пункт, $i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,p}$;

c_{kj} – стоимость перевозки единицы груза из k-го перевалочного пункта в j-й пункт назначения, $k = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,n}$;

a_i – запасы груза в i-м пункте отправления;

b_j – потребность в грузе в j-м пункте назначения;

c_k – вместимость k-го перевалочного пункта;

x_{ij} – количество груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения;

y_{ik} – количество груза, перевозимого из i-го пункта отправления в k-й перевалочный пункт;

z_{kj} – количество груза, перевозимого из k-го перевалочного пункта в j-й пункт назначения.

Математическая модель задачи с учетом выше приведенных обозначений может быть представлена в виде задачи линейного программирования:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} c_{ik} \cdot y_{ik} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} \cdot z_{kj} \to \min_{x_{ij}, y_{ik}, z_{kj} \in \Omega}, \quad (1.42)$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{k=1}^{p} y_{ik} \le a_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.43}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{k=1}^{p} z_{kj} \ge b_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.44}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik} \le c_k, \quad k = \overline{1,p}, \tag{1.45}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} z_{kj}, \quad k = \overline{1,p}, \tag{1.46}$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \ y_{ik} \ge 0, \ \ z_{kj} \ge 0, \ \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}, \ k = \overline{1,p}. \tag{1.47}$$

Здесь целевая функция (1.42) складывается из затрат трех видов: на доставку части груза из пунктов отправления в пункты назначения, минуя перевалочные пункты; на перевозку части груза из пунктов назначения в перевалочные пункты; на доставку груза из перевалочных пунктов в пункты назначения. Система ограничений (1.43) говорит о том, что суммарные объемы грузов, вывозимые из пунктов отправления, не могут превышать запасы грузов в этих пунктах. Система ограничений (1.44) говорит о том, что суммарные объемы грузов, поступающие в пункты назначения, не могут быть меньше затребованных объемов. Система ограничений (1.45) означает то, что суммарный завоз грузов на каждый перевалочный пункт не может превышать его вместимости. Система ограничений (1.46) говорит о том, что весь груз из перевалочных пунктов должен быть вывезен полностью.

Как и в предыдущей задаче, математическая модель (1.42) – (1.47) не может быть приведена к классической. Поэтому решение задачи наиболее целесообразно возложить на программу *Solver* (Поиск решения) информационной системы *Microsoft Excel.*

1.5.5. Транспортная задача о двухэтапной перевозке груза нескольких видов

Содержательная постановка задачи. Груз, включающий q видов продукции, требуется доставить из m пунктов отправления в n пунктов назначения. При доставке в пункты назначения грузы могут быть сначала доставлены на p перевалочных пунктов. Заданы стоимости перевозок для каждого вида груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения и перевалочный пункт, а также стоимости перевозки из каждого перевалочного пункта в каждый пункт назначения.

Математическая модель задачи. Обозначим:

c_{ijl} – стоимость перевозки единицы l-го вида груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $l=\overline{1,q}$;

c_{ikl} – стоимость перевозки единицы l-го вида груза из i-го пункта отправления в k-й перевалочный пункт, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$, $l=\overline{1,q}$;

c_{kjl} – стоимость перевозки единицы l-го вида груза из k-го перевалочного пункта в j-й пункт назначения, $k=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,n}$, $l=\overline{1,q}$;

a_{il} – запасы l-го вида груза в i-м пункте отправления;

b_{jl} – потребность в l-м виде груза в j-м пункте назначения;

c_{kl} – вместимость k-го перевалочного пункта по отношению к l-му виду груза ;

x_{ijl} – количество l-го вида груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения;

y_{ikl} – количество l-го вида груза, перевозимого из i-го пункта отправления в k-й перевалочный пункт;

z_{kjl} – количество l-го вида груза, перевозимого из k-го перевалочного пункта в j-й пункт назначения.

Математическая модель задачи с учетом выше приведенных обозначений может быть представлена в виде задачи линейного программирования:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}c_{ijl}\cdot x_{ijl}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}c_{ikl}\cdot y_{ikl}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}c_{kjl}\cdot z_{kjl}\to\min_{x_{ijl},y_{ikl},z_{kjl}\in\Omega},\qquad(1.48)$$

$$\Omega:\ \sum_{j=1}^{n}x_{ijl}+\sum_{k=1}^{p}y_{ikl}\le a_{il},\quad i=\overline{1,m},\qquad(1.49)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ijl}+\sum_{k=1}^{p}z_{kjl}\ge b_{jl},\quad j=\overline{1,n},\quad l=\overline{1,q},\qquad(1.50)$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ikl}\le c_{kl},\quad k=\overline{1,p},\quad l=\overline{1,q},\qquad(1.51)$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ik}=\sum_{j=1}^{n}z_{kj},\quad k=\overline{1,p},\quad l=\overline{1,q},\qquad(1.52)$$

$$x_{ijl} \geq 0, y_{ikl} \geq 0, z_{kjl} \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \;\; j = \overline{1,n}\,, \; k = \overline{1,p}\,, \; l = \overline{1,q}\,. \quad (1.53)$$

Математическая модель задачи отличается от предыдущей только тем, что она учитывает разновидность грузов. Как и предыдущую, данную задачу целесообразно решать с помощью программы *Solver* (Поиск решения) информационной системы *Microsoft Excel.*

1.5.6. Транспортная задача о двухэтапной перевозке груза нескольких видов по запросам потребителей

Существует модификация транспортной задачи двухэтапной перевозки грузов нескольких видов, в которой количество груза в пунктах отправления не фиксировано. Оно зависит от запросов потребителей.

Математическая модель задачи. Обозначим:

c_{ijl} – стоимость перевозки единицы l-го вида груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, $i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \quad l = \overline{1,q}$;

c_{ikl} – стоимость перевозки единицы l-го вида груза из i-го пункта отправления в k-й перевалочный пункт, $i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,p}, \quad l = \overline{1,q}$;

c_{kjl} – стоимость перевозки единицы l-го вида груза из k-го перевалочного пункта в j-й пункт назначения, $k = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,n}, \quad l = \overline{1,q}$;

t_{il} – затраты на производство l-го вида груза в i-м пункте отправления;

b_{jl} – потребность в l-м виде груза в j-м пункте назначения;

c_{kl} – вместимость k-го перевалочного пункта по отношению к l-му виду груза ;

x_{ijl} – количество l-го вида груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения;

y_{ikl} – количество l-го вида груза, перевозимого из i-го пункта отправления в k-й перевалочный пункт;

z_{kjl} – количество l-го вида груза, перевозимого из k-го перевалочного пункта в j-й пункт назначения;

s_{il} – количество производимого l-го вида груза в i-м пункте отправления.

Математическая модель задачи с учетом выше приведенных обозначений может быть представлена в виде задачи линейного программирования:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}c_{ijl}\cdot x_{ijl}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}c_{ikl}\cdot y_{ikl}+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}c_{kjl}\cdot z_{kjl}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{q}t_{il}s_{il}\rightarrow\min_{x_{ijl},y_{ikl},z_{kjl},s_{il}\in\text{Щ}},\tag{1.54}$$

$$\Omega:\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ijl}+\sum_{k=1}^{p}y_{ikl}\le s_{il},\quad i=\overline{1,m},\quad l=\overline{1,q},\tag{1.55}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ijl}+\sum_{k=1}^{p}z_{kjl}\ge b_{jl},\quad j=\overline{1,n},\quad l=\overline{1,q},\tag{1.56}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ikl}\le c_{kl},\qquad k=\overline{1,p},\qquad l=\overline{1,q},\tag{1.57}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ik}=\sum_{j=1}^{n}z_{kj},\qquad k=\overline{1,p},\qquad l=\overline{1,q},\tag{1.58}$$

$$x_{ijl}\ge 0,\ y_{ikl}\ge 0,\ z_{kjl}\ge 0,\ s_{il}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p},\ l=\overline{1,q}.\tag{1.59}$$

Целевая функция в математической модели (1.54) – (1.59) отличается от целевой функции (1.48) только тем, что она учитывает производство продукции (грузов) в пунктах отправления. Как и предыдущую, данную задачу целесообразно решать с помощью программы *Solver* (Поиск решения) информационной системы *Microsoft Excel.*

1.5.7. Транспортная задача о закрытии предприятия

Содержательная постановка задачи. Производственное объединение располагает n заводами и m складами. Заданы потребности складов в продукте и стоимости на перевозку продуктов с каждого завода на каждый склад. Также заданы фиксированные стоимости функционирования заводов, заданы возможности заводов по производству продукта. Производственное объединение рассматривает возможность закрытия одного или нескольких заводов. Это должно уменьшить затраты на перевозку. Какие заводы, если это целесообразно, должны быть закрыты?

Математическая формулировка задачи. Обозначим:

c_{ij} – стоимости перевозки с j-го завода на i-й склад;

d_i, – потребности i-го склада в продукте, $i=1,\ \ldots,\ m$;

a_j – возможность j-го завода по производству продукта;

e_j – фиксированная стоимость функционирования j-го завода;

z_j – двоичное число, показывающие, нужно ли закрыть j-й завод (значение 0) или оставить его работать (значение 1);

x_{ij} – количество перевозимого товара с j-го завода на i-й склад. Тогда математическая модель транспортной задачи о закрытии завода может быть представлена в виде:

$$y = \sum_{j=1}^{n} \left(z_j \cdot e_j + \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \right) \to \min_{z_j, x_{ij} \in \Omega}, \tag{1.60}$$

$$\Omega: \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le z_j a_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.61}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge d_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.62}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.63}$$

$$z_j \in \{0,1\}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.64}$$

Здесь целевая функция (1.60) определяет общие затраты производственного объединения на функционирование заводов и транспортировку готовой продукции на склады. Ограничения (1.61) определяет возможности заводов по производству продукции. Ограничение (1.62) определяют потребности складов в готовой продукции.

Тема 1.6. Задачи целочисленного линейного программирования

Продолжая тему перевозки груза, рассмотрим еще несколько задач, математическая модель которых соответствует целочисленной задаче линейного программирования, но не вкладывается в понятие *транспортной* задачи.

Оптимальное решение ниже приведенных задач, как и ранее рассмотренных задач в п.п. 1.5.3 – 1.5.7, не может быть получено с помощью метода потенциалов. Решение этих задач классическими методами линейного программирования также не представляется возможным из-за целочисленности переменных x_j. Искомые решения можно получить методом отсечения (путем ввода в задачу дополнительных ограничений в виде неравенств Гомори), однако процедуры решений в этом случае резко усложняются. Поэтому поиск решения ниже приведенных задач опять-таки целесообразно возложить на программу *Solver* информационной системы *Microsoft Excel.*

1.6.1. Задача о расстановке грузового флота

Содержательная постановка задачи. Пусть грузовой флот имеет в своем составе суда n типов. Количество судов типа j равно q_j, а затраты при использовании одного судна типа j в планируемом периоде составляет c_j, $j=1,2,\ldots,n$. Каждое судно обладает грузовыми емкостями m типов (трюмы, палубы, танки и т.п.). Грузоподъемность емкости i на судне типа j равна d_i, $i=1,2,\ldots,m$. Перевозке подлежат p видов груза. Груз вида k имеется в количестве a_k, $k=1,2,\ldots,p$. Требуется выбрать наиболее экономичный комплекс средств для перевозки груза.

Математическая модель задачи. Обозначим: x_j – количество судов j-го типа, $j=1,2,\ldots,n$; z_{ik} – количество груза вида k, подлежащего загрузке в емкость i, $k=1,2,\ldots,p$.

Тогда математическая модель задачи о расстановке грузового флота имеет вид:

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{x_j \in \Omega}, \tag{1.65}$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j - \sum_{k=1}^{p} z_{ik} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}\ , \tag{1.66}$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ik} = a_k, \quad k = \overline{1,p}, \tag{1.67}$$

$$0 \le x_j \le q_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.68}$$

$$x_j = \text{int}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.69}$$

$$z_{ik} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad k = \overline{1,p} \ . \tag{1.70}$$

Здесь ограничение (1.66) показывает, что общее количество груза, загруженное в емкости каждого типа, не должно превышать суммарной грузоподъемности этих емкостей по всем судам, а ограничения (1.67) говорят о том, что перевозки по всем грузам должны быть полностью осуществлены.

Пример транспортной задачи о расстановке грузового флота. Пусть грузовой флот имеет в своем составе суда четырех типов. Количество судов j-го типа ($j=1,2,3,4$) соответственно равно 15, 20, 30, 25. Затраты при использовании одного судна j-го типа в планируемом периоде составляют соответственно 6, 5, 7, 4 ед. Каждое судно обладает грузовыми емкостями трех типов (трюмы, палубы, танки). Грузоподъемность z_{ij} каждой i–й емкости ($i=1,2,3$) на судне типа j определяется из матрицы $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Перевозке подлежит груз двух видов (p=2). Груз вида k ($k=1,2$) имеется соответственно в количестве 220 и 130. Требуется выбрать наиболее экономичный комплекс средств перевозки груза.

Решение задачи в информационной системе Microsoft Excel. Для решения задачи необходимо сделать следующие установки данных в диалоговом окне команды: СЕРВИС / ПОИСК РЕШЕНИЯ:

Целевая ячейка – $C$13

Вид экстремума – минимум

Ячейки с изменяемыми переменными – $B$6:$E$6;$L$5:$M$7

Ограничения: $B$6:$E$6 >= 0
$B$6:$E$6 >= целое
$B$6:$E$6 <= $B$4:$E$4
$L$5:$M$7 >= 0
$L$5:$M$7 >= целое
$P$14:$P$16 >= 0
$L$9:$M$9 = $L$11:$M$11

Вид экрана после выполнения команды СЕРВИС / ПОИСК РЕШЕНИЯ показан на рис.1.7.

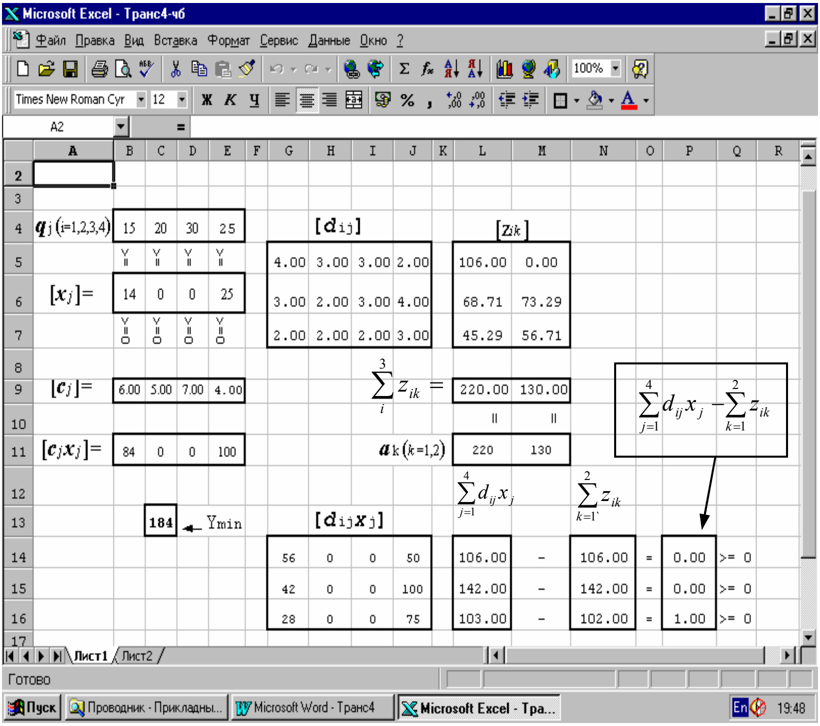


Рис 1.7.

1.6.2. Задача о развозке груза

Содержательная постановка задачи. Пусть некоторая центральная база снабжает продукцией (ее можно считать однородной) m складов. Развозка продукции на склады осуществляется одним грузовиком, причем каждый склад получает свой заказ полностью в один прием – грузоподъемность грузовика для этого достаточна. Грузовик может одновременно взять груз, соответствующий не более чем k заказам. Грузовик может объезжать склады по определенным r маршрутам. Один и тот же склад может находиться на разных маршрутах.

Пусть для каждого склада известна функция затрат в зависимости, например, от размера заказа. Требуется составить график развозок, обеспечивающий всех клиентов и минимизирующий суммарные затраты. Время доставки никак не учитывается. Предполагается, что все операции по доставке заведомо могут быть осуществлены в течение некоторого периода времени, устраивающего всех потребителей.

Под способом развозки будем понимать любую допустимую комбинацию выполнения заказов. Он представляет собой m–мерный столбец, i-й компонент которого равен единице, если i–й заказ в этом способе удовлетворяется, и нулю – в противном случае Для любой реальной задачи при небольших значениях m, k и r можно фактически выписать все такие способы развозки. Число n этих способов будет зависеть не только от перечисленных параметров, но и от числа складов на каждом маршруте, объема заказов и т.д. Каждому j–му способу развозки соответствуют затраты c_j.

Пусть при данных конкретных условиях задачи составлена матрица $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ всевозможных способов развозки, состоящее из нулей и единиц. Столбцы этой матрицы представляют собой описанные выше способы развозки, т.е. $a_{ij}=1$, если в j–м способе i–й заказ удовлетворяется, и $a_{ij}=0$ в противном случае. Теперь задача состоит в выборе наиболее экономичной комбинации этих способов.

Математическая модель задачи. Введем переменные x_j , равные 1 если j–й способ развозки реализуется, и равные 0 в противном случае. Тогда математическая модель задачи принимает вид:

$$y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{x_j \in \Omega}, \tag{1.71}$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1, \quad i=\overline{1,m}\ . \tag{1.72}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j=\overline{1,n}, \tag{1.73}$$

$$a_{ij} \in \{0,1\}, \quad i=\overline{1,m}\ . \tag{1.74}$$

Условие (1.72) означает, что все заказы должны быть удовлетворены только один раз.

Пример задачи о развозке груза. Пусть в рамках условия задачи о развозке груза известна матрица

$$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

всех возможных способов развозки груза из центральной базы в пять магазинов, а также затраты, связанные с реализацией каждого способа, а именно: 11, 14, 9, 12, 13, 7,10, 8, 13 стоимостных ед. Составить график развозки, обеспечивающий минимальные суммарные затраты.

Решение задачи в информационной среде Microsoft Excel. Для решения задачи необходимо сделать следующие установки данных в диалоговом окне команды СЕРВИС / ПОИСК РЕШЕНИЯ:

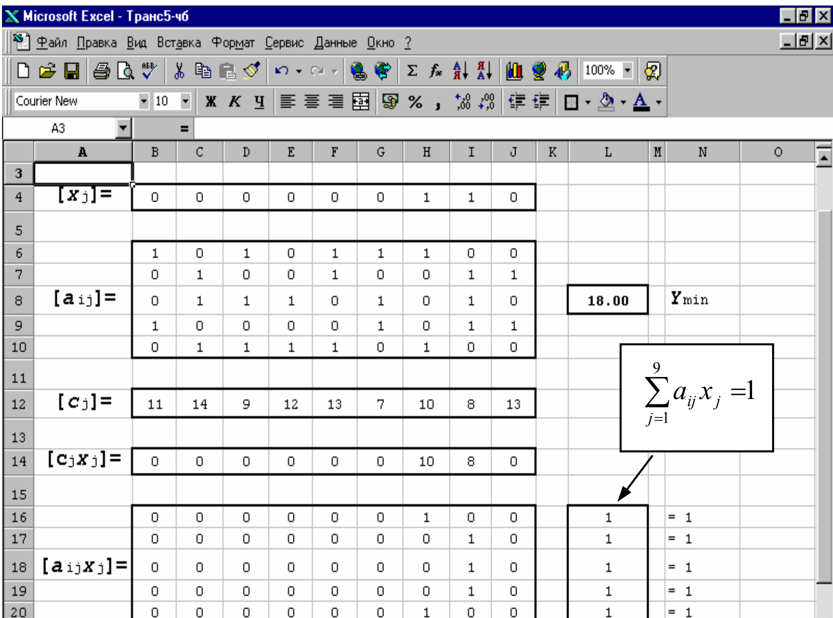
Целевая ячейка – $L$8 .

Ячейки с изменяемыми переменными – $B$4:$J$4 .

Ограничения: $B$4:$J$4 = двоичное

$L$16:$L$20 = 1 .

Вид экрана после выполнения команды СЕРВИС / ПОИСК РЕШЕНИЯ показан на рис.1.8.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
3														
4	[xj]=	0	0	0	0	0	0	1	1	0				
5														
6		1	0	1	0	1	1	1	0	0				
7		0	1	0	0	1	0	0	1	1				
8	[aij]=	0	1	1	1	0	1	0	1	0		18.00		Ymin
9		1	0	0	0	0	1	0	1	1				
10		0	1	1	1	1	0	1	0	0				
11														
12	[cj]=	11	14	9	12	13	7	10	8	13				
13														
14	[cjxj]=	0	0	0	0	0	0	10	8	0				
15														
16		0	0	0	0	0	0	1	0	0		1		= 1
17		0	0	0	0	0	0	0	1	0		1		= 1
18	[aijxj]=	0	0	0	0	0	0	0	1	0		1		= 1
19		0	0	0	0	0	0	0	1	0		1		= 1
20		0	0	0	0	0	0	1	0	0		1		= 1

Рис.1.8

Индивидуальные задания к разделу 1

Для приобретения практических навыков по использованию математических методов при решении конкретных задач математического программирования, а также для овладения современными информационными технологиями поиска оптимальных решений, студенты должны самостоятельно выполнить два индивидуальных задания.

Первое индивидуальное задание касается *транспортной задачи*, а второе – *целочисленной задачи линейного программирования*. Оба индивидуальных задания входят в контрольную работу №1, которую студенты должны выполнить самостоятельно и представить отчет о выполнении преподавателю.

В первом индивидуальном задании по условию задачи и индивидуальным исходным данным студенты должны:

составить математическую модель конкретной транспортной задачи;

найти оптимальное решение транспортной задачи, используя метод потенциалов;

найти оптимальное решение транспортной задачи, используя программу *Solver* информационной системы *Microsoft Excel*;

найти оптимальное решение транспортной задачи, используя информационную систему *MathCAD 2000.*

Во втором индивидуальном задании по условию задачи и индивидуальным исходным данным студенты должны:

составить математическую модель конкретной целочисленной задачи линейного программирования;

найти оптимальное решение задачи, используя программу *Solver* информационной системы *Microsoft Excel.*

Задание №1

Условие задачи. Составить оптимальный план перевозок одежды между тремя фабриками химчистки и пятью пунктами приема одежды в химчистку от населения, если расстояния (в *км*) между фабриками химчистки и приемными пунктами определяются матрицей

$$C = \left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 13 & 1 \\ 6 & 8 & 9 & 9 & 3 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,5}.$$

Известны мощности фабрик химчистки и пропускные способности приемных пунктов.

Данные о мощности фабрик химчистки и о пропускных способностях приемных пунктов каждым студентом выбираются из табл.1.7 и табл.1.8 в соответствии с его вариантом. Вариант определяется по последней цифре номера зачетной книжки студента.

Таблица 1.7 – Мощность фабрик химчистки (*т. в сутки*)

№ фабрики	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,4	3,0	4,2	3,1	1,9	0,9	1,0	2,5	3,3	1,8
2	2,3	1,5	1,3	4,2	2,6	4,3	3,1	3,5	3,9	4,3
3	2,8	4,0	3,0	1,2	4,0	3,3	4,4	2,5	1,3	2,4

Таблица 1.8 – Пропускная способность приемных пунктов (*т. в сутки*)

№ прием. пункта	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1,5	0,9	1,1	1,0	2,7	2,1	1,2	2,5	2,8	1,3
2	1,6	2,5	1,3	3,0	1,5	2,3	1,9	2,0	1,9	0,6
3	2,1	3,0	2,2	0,6	1,0	1,4	1,8	1,7	1,1	2,4
4	1,7	0,7	3,1	1,9	3,0	1,2	1,5	0,9	0,7	3,0
5	1,6	1,4	0,8	2,0	0,3	1,5	2,1	1,4	2,0	1,2

Требования к отчету студента по выполнению индивидуального задания №1. Отчет должен содержать:

условие транспортной задачи с индивидуальными исходными данными в соответствии с выбранным вариантом (без таблиц выбора варианта);

математическая модель задачи (см. решение прим.1.1 в п.1.3.6);

пошаговое решение транспортной задачи методом потенциалов с сопровождением каждого шага необходимыми пояснениями и таблицами (см. решение прим.1.1 в п.1.3.6);

решение транспортной задачи с помощью программы *Solver* информационной системы *Microsoft Excel* с указанием всех установок в диалоговом окне программы *Solver* (см. п. 1.4.3) и распечаткой соответствующей электронной таблицы после выполнения команды СЕРВИС / ПОИСК РЕШЕНИЯ (см. рис.1.4);

решение транспортной задачи с помощью информационной системы *MathCAD 2000* с распечаткой вида экрана с последовательностью решения транспортной задачи (см. рис.1.5);

сравнительная оценка трех способов решения транспортной задачи по трудоемкости и времени решения.

Задание №2

Условие задачи. Составить оптимальный план застройки микрорайона города, если известно, что он должен застраиваться жилыми домами трех различных серий. Характеристики жилых домов каждой серии представлены в табл.1.9. Учитывая демографический прогноз населения проектируемого микрорайона, необходимо, чтобы количество квартир соответствовало проектному заданию, представленному в табл.1.10.

Данные о проектном количестве квартир выбираются студентом из табл.1.10 в соответствии с его вариантом. Вариант определяется по последней цифре номера зачетной книжки студента.

Таблица 1.9 – Состав квартир и сметная стоимость жилых домов различных серий (для всех вариантов одинаковые)

Характеристика жилых домов серии	Серия		
	1	2	3
Количество квартир - всего	200	210	150
в том числе: на 2 чел.	50	50	60
на 3 чел	60	70	50
на 4 чел	90	90	40
Сметная стоимость жилого дома, тыс. грн.	1200	1250	800

Таблица 1.10 – Проектируемое количество квартир в микрорайоне на 2, 3 и 4 человека

Состав семьи	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 чел.	600	800	750	625	900	850	950	700	1000	800

3 чел.	1800	1750	1850	1750	2100	1900	2000	1850	1950	2050
4 чел.	700	650	800	600	750	550	400	850	600	450

Требования к отчету студента по выполнению индивидуального задания №2. Отчет должен содержать:

условие целочисленной задачи линейного программирования с индивидуальными исходными данными в соответствии с выбранным вариантом (без таблицы выбора варианта);

математическая модель задачи;

решение задачи с помощью программы *Solver* информационной системы *Microsoft Excel* с указанием всех установок в диалоговом окне программы *Solver* и распечаткой соответствующей электронной таблицы после выполнения команды СЕРВИС / ПОИСК РЕШЕНИЯ .

Требования к оформлению контрольной работы №1. Контрольная работа должна состоять из титульной страницы (см. Приложение) и двух отчетов по индивидуальным заданиям №1 и №2 соответственно. Контрольная работа может быть полностью напечатана на принтере или выполнена в рукописном варианте. Во втором случае распечатки экранов (в соответствии с требованиями индивидуальных заданий) должны быть аккуратно вклеены в рукописную контрольную работу.

Раздел 2. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Тема 2.1. Общие понятия теории массового обслуживания

Необходимость повышения эффективности общественного производства обусловливает постановку и решение все более важных и сложных задач. В конечном итоге это требует углубления ранее разработанных методов исследования и создания новых технических, технологических, экономических и математических теорий. Новые методы количественного анализа проверяются практикой, тем, что имеет место в действительности.

Теория массового обслуживания представляет собой выделившуюся часть нового научного направления в теории вероятностей, которая сформировалась в самостоятельную научную дисциплину, благодаря специфике применяемого математического аппарата и важности решаемых практических задач.

Начало разработки практических задач массового обслуживания положил сотрудник Копенгагенской телефонной компании датский математик А.К.Эрланг (1878 – 1929 гг.) в период между 1908 – 1922 гг. В 1909 г. появилась его работа "Теория вероятностей и телефонные переговоры" и другие публикации, в которых были сформулированы первые прикладные задачи телефонии. Эти задачи были связаны с необходимостью упорядочить работу телефонной сети и разработать методы оценки качества обслуживания потребителей в зависимости от числа используемых устройств.

Обобщение методов решения разнообразных задач и разработка общей теории массового обслуживания связаны с именем советского математика А.Я.Хинчина. В его книге "Математические методы теории массового обслуживания" впервые были сформулированы общие идеи и методы теории. Дальнейшее развитие теории массового обслуживания связано с именем советского математика Б.В.Гнеденко и его учеников А.Н.Колмогорова, Н.П.Бусленко и др. Из зарубежных авторов известны Д.Кендалл, Ф.Паллачек, Л.Токач и др.

Общей особенностью задач с применением теории массового обслуживания является случайный характер исследуемых процессов. Одной из типичных жизненных ситуаций следует считать образование очередей при удовлетворении каких-либо потребностей, что приводит к потерям рабочего времени и непроизводительному расходу различных ресурсов.

Во всех отраслях человеческой деятельности имеют место процессы, носящие характер массового обслуживания:

бытовое обслуживание – обслуживание продавцами покупателей в магазинах, ремонт различных бытовых предметов в мастерских, разговоры по телефону, оказание медицинской помощи, библиотечное обслуживание, гостиничное обслуживание, пожарное обслуживание и т.п.;

в военном деле – обстрел самолетов, катеров и других видов техники противника, равно как и бомбежка с самолета;

в производстве – транспортное и ремонтное обслуживание, организация снабжения.

Типичным примером задачи массового обслуживания в жилищно-коммунальном хозяйстве является эксплуатация одним рабочим (сантехником, электриком, ремонтником) группы объектов (домов, подъездов, квартир). Если за рабочим закреплено недостаточно объектов, то в моменты их исправности он простаивает, если много – он не может их своевременно обслужить. Аналогичная ситуация возникает, если несколько (n) объектов обслуживается несколькими (r) рабочими.

Теория массового обслуживания изучает закономерности протекания процессов, связанных с массовым обслуживанием, разработкой количественных методов отыскания таких объективных характеристик, которые обеспечивают своевременное удовлетворение поступающих требований на обслуживание.

В отечественной и зарубежной литературе теорию массового обслуживания называют по-разному: теорией линии ожидания, теорией очередей, теорией группообразования, проблемами скученности и др. Эта научная дисциплина занимается описанием, анализом и исследованием различных по своему содержанию явлений с целью выявления и создания необходимых предпосылок для их качественного функционирования. При этом под качеством обслуживания понимается не то, как хорошо выполнена работа, а насколько она своевременно выполнена, не образуется ли очередь на обслуживание требований или не происходит ли потеря требований на обслуживание из-за одновременной занятости обслуживающего персонала.

В самом общем виде очередь на обслуживание может возникать по следующим причинам:

недостаточное количество или недостаточная производительность обслуживающих аппаратов (обслуживающего персонала);

нерегулярное поступление требований;

изменение (варьирование) продолжительности обслуживания.

При организации производств, когда требования на обслуживание поступают равномерно, через равные промежутки времени, и когда они своевременно обслуживаются, никакой задачи массового обслуживания не возникает.

Тема 2.2. Основные понятия, терминология и классификация систем массового обслуживания

Системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо видов услуг, а с другой стороны, происходит удовлетворение этих запросов, называются *системами массового обслуживания.*

Под обслуживанием понимается удовлетворение какой-либо потребности.

Систему массового обслуживания можно представить как совокупность последовательно связанных между собой входящих потоков на обслуживание требований (заявки на ремонт, требования на выдачу книг, запрос на взлет и т.д.), очередей, каналов обслуживания (линии СТО, сотрудники отдела абонементного обслуживания, взлетные полосы аэродрома и т.д.) и выходящих потоков требований после обслуживания.

Таким образом, составными элементами систем массового обслуживания являются:

входящий поток требований и заявок, которые представляют собой запросы на удовлетворение какой-либо потребности (под потоком требований подразумевается последовательность заявок на обслуживание, следующие в случайные моменты времени);

очередь на обслуживание, состоящая из требований, которые нуждаются в обслуживании;

каналы обслуживания, объединяемые в обслуживающую систему (технические средства и люди, с помощью которых удовлетворяются различные запросы);

выходящий поток требований (обслуженных и не обслуженных), покидающих обслуживающую систему (для другой системы может быть входящим).

Существует несколько разновидностей систем массового обслуживания, отличающихся особенностями поступления требований и особенностями организации работы обслуживающих аппаратов. Еще Эрланг обратил внимание на то, что имеют место два основных типа систем в телефонии – с ожиданием и потерями. В современной теории массового обслуживания различают значительно большее количество типов систем. Системы массового обслуживания по наличию того или иного признака можно классифицировать следующим образом:

1. По *характеру поступления требований* – на системы с *регулярным* и *случайным потоками* поступления требований в систему. Если количество требований, поступающих в систему в единицу времени (интенсивность потока) постоянно или является заданной функцией времени, то мы имеем систему с регулярным потоком поступления требований, в противном случае – со случайным.

2. Системы со *случайным потоком* требований подразделяются на *стационарные* и *нестационарные.* Если параметры потока требований не зависят от расположения рассматриваемого интервала на оси времени, то поток требований – стационарный, в противном случае – нестационарный. Например, если число покупателей, приходящих в магазин, не зависит от времени суток, то поток покупателей - (требований) – стационарный.

3. По количеству поступающих требований – на системы с *ординарным* и *неординарным* потоками требований. Если вероятность поступления двух и более требований одновременно равна нулю или имеет столь малую величину, что ею можно пренебречь, то имеем систему с ординарным потоком требований. Например, поток требований – самолетов, поступающих на взлетно-посадочную полосу аэродрома, – можно считать ординарным.

4. По *связи между требованиями* – на системы *без последействия* от поступивших требований и *с последействием*. Если вероятность поступления требований в систему в некоторый момент времени не зависит от того, сколько требований уже поступило, т.е. не связана с предысторией изучаемого процесса, то мы имеем систему без последействия, в противном случае – с последействием. Примером системы с последействием может служить поток студентов, сдающих зачет преподавателю.

5. По *реакции требования на занятость каналов* – на системы *с отказами* и *ожиданием*. Если вновь поступившее требование на об-

служивание застает все каналы занятыми и покидает систему, то имеем систему с отказами.

6. *Системы с ожиданием* подразделяются на системы с *ограниченным* и *неограниченным* ожиданием. Если требование покидает систему, когда очередь достигла определенного размера – то имеем систему с ограниченным ожиданием. Примером может служить автосамосвал с раствором. Если время ожидания велико, то во избежания затвердения раствора он может быть разгружен в другом месте. Если поступившее требование, застав все каналы занятыми, вынуждено ожидать своей очереди до тех пор, пока оно не будет обслужено, то имеем систему с ожиданием без ограничения. Пример: самолет, который находится на аэродроме в ожидании освобождения взлетной полосы.

7. *По способу выбора требований на обслуживание* – на системы с приоритетом требований, по мере поступления требований, случайным выбором требования, последнее требование обслуживается первым. Если система массового обслуживания охватывает несколько категорий требований и по каким-либо соображениям необходим определенный порядок их выбора, то имеем систему с приоритетом. Так, при поступлении изделий на стройплощадку в первую очередь монтируются те, которые обусловлены строительной технологией. Если освободившийся канал обслуживает требование, поступившее в систему ранее других, то имеем систему обслуживания требований по мере их поступления. Например, покупатель, подошедший первым к продавцу, обслуживается первым. Если требования из очереди в канал обслуживания поступают случайным образом, то имеем систему со случайным выбором требований на обслуживание. Пример: выбор слесарем-сантехником одной из нескольких заявок от жильцов, о времени поступления которых (заявок) слесарь не имеет никакого представления. Если на обслуживание выбирается последнее поступившее требование, то имеем систему с выбором «последний обслуживается первым». Так, при укладке строительных изделий в штабель удобнее брать из штабеля (очереди) изделие, уложенное последним.

8. По *времени обслуживания* требования – на системы с *детерминированным* и *случайным временем* обслуживания. Если интервал времени между моментом поступления требования в канал обслуживания и моментом выхода требования из канала постоянен, то имеем систему с детерминированным временем обслуживания, в противном случае – со случайным. Например, мойка автомобилей в автомойке представляет собой систему обслуживания с

ке представляет собой систему обслуживания с детерминированным временем обслуживания.

9. По *числу каналов обслуживания* – на одноканальные и многоканальные системы. Так, при монтаже дома может быть использован один подъемный кран (один канал обслуживания) или несколько (много каналов).

10. По *количеству этапов обслуживания* – на однофазные и многофазные системы. Если каналы обслуживания расположены последовательно и они неоднородны, то имеем многофазную систему обслуживания. Примером такой системы может служить обслуживание автомобилей на СТО (мойка, диагностика, замена фильтров и т.д.).

11. По *однородности требований* – на системы с *однородными* и *неоднородными потоками* требований. Так, если под погрузку прибывают фургоны одной грузоподъемности, то имеем систему с однородным потоком требований, если с разной – то с неоднородным.

12. По *ограниченности потока треб*ований – на *замкнутые* и *разомкнутые* системы. Если поток требования ограничен и требования, покинувшие систему, через некоторое время в нее возвращаются, то имеем замкнутую систему, в противном случае – разомкнутую. Примером замкнутой системы может служить ремонтная бригада и обслуживаемое оборудование.

13. По загруженности каналов – на упорядоченные и не упорядоченные системы. *В упорядоченных системах* обслуживающие каналы загружены неравномерно. Поступившее требование обслуживается строго определенным каналом из имеющихся свободных, а именно – каналом с наименьшим номером (считается, что все каналы пронумерованы). *В неупорядоченных системах* все каналы равноправны и вновь поступившее требование обслуживается без предпочтения одним из свободных каналов

На рис.2.1 в виде структурной схемы приведена упрощенная классификация систем массового обслуживания.

Если изучены или заданы входящие потоки требований, механизм (число каналов обслуживания, продолжительность обслуживания и т.д.) и способ выбора требований на обслуживание, то появляются условия для построения математической модели системы, лежащей в основе решения любой задачи массового обслуживания.

Рис.2.1 – Классификация систем массового обслуживания

Задачи массового обслуживания условно делят на задачи *анализа* и *задачи* синтеза. Первые предполагают определение основных параметров функционирования системы массового обслуживания при неизменных, наперед заданных исходных характеристиках: структуре системы, способе выбора требования на обслуживания, потоках требований и законах распределения времени на их обслуживания. Вторые (задачи синтеза) направлены на поиск оптимальных параметров систем массового обслуживания.

Как отмечалось ранее, общей целью изучения процессов массового обслуживания, а следовательно, и решения задач, следует считать оценку качества функционирования обслуживающей системы и выявление условий обеспечения ее успешной работы по ление условий обеспечения ее успешной работы по своевременному удовлетворению поступающих требований.

Примечание. В дальнейшем наряду с использованием термина «канал» будут также использоваться термины «аппарат», «прибор» и др.

Качество функционирования систем массового обслуживания оценивается двояко: со стороны интересов поступающих требований и со стороны интересов обслуживающей системы.

Следует разграничивать критерии качества обслуживания в зависимости от типа системы. В системах с отказом такими критериями служат:

средний процент заявок, получивших отказ;

вероятность отказа очередному требованию;

вероятность того, что обслуживанием заняты все или определенное количество из имеющихся аппаратов и др.

В системах с ожиданием без ограничений критериями качества обслуживания служат:

средняя длина очереди и вероятность ее образования;

среднее время ожидания начала обслуживания;

вероятность того, что обслуживающие аппараты заняты или свободны и др.

При оценке функционирования систем массового обслуживания, кроме перечисленных критериев, могут быть использованы следующие *стоимостные показатели*:

стоимость обслуживания каждого требования в системе;

стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в единицу времени;

стоимость убытков, связанных с уходом из системы требований;

стоимость эксплуатации каждого прибора системы в единицу времени;

стоимость единицы времени простоя аппарата и др.

В задачах массового обслуживания используются основные числовые характеристики входящего и выходящего потока требований, а также характер их обслуживания. В этой связи для решения задачи рациональной организации обслуживающей системы нужно, прежде всего, исследовать и математически описать поток требований и время обслуживания. Для этого используются данные фотографии рабочего дня, данные диспетчерского и оперативного учета.

Тема 2.3. Математико-статистическая обработка производственных данных

Случайная дискретная величина характеризуется двумя основными параметрами: множеством ее возможных значений и вероятностью того, что она примет то или иное значение из этого множества.

Как известно, полное представление о случайной дискретной или непрерывной величине дает закон ее распределения, который характеризуется возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями. Вероятность в данном случае является одним из основных понятий математической статистики и представляет собой математическое определение объективной возможности того, что случайная дискретная величина примет то или иное значение.

В литературе, посвященной теоретическим исследованиям, доказывается, что простейший поток требований, поступающих в систему в единицу времени, подчиняется *пуассоновскому* закону распределения. При этом вероятность того, что в обслуживающую систему за определенный промежуток времени t поступит k требований, вычисляется по формуле

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots n, \tag{2.1}$$

где $P_k(t)$ – вероятность одновременного поступления в обслуживающую систему k требований за исследуемый промежуток времени; e – известная константа математического анализа, которая представляет собой сумму бесконечного ряда $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ и является основанием натуральной системы логарифмов (e =2,72); λ – среднее количество требований, поступающих на обслуживание в единицу времени; k – количество одновременно поступающих требований; λt – среднее число требований, поступающее за время t.

Особенностью случайной величины, описываемой функцией $P_k(t)$ для любого значения t, является то, что она (случайная величина) может принимать только целочисленные значения 0, 1, 2, …, k и с возрастанием t не убывает.

Выявление факта подчинения потока требований пуассоновскому закону распределения имеет теоретическую и практическую ценность. В случае такого подчинения имеет место так называемый простейший поток требований, одновременно обладающий следующими свойствами:

стационарностью – вероятность одновременного поступления определенного количества требований на обслуживание в течение исследуемого промежутка времени Δt не зависит от начала его отсчета, а зависит только от продолжительности наблюдения;

ординарностью – вероятность поступления двух и более требований за бесконечно малый период времени несоизмеримо мала по сравнению с вероятностью поступления одного требования за этот же период;

отсутствие последействия – вероятность поступления определенного количества требований в промежуток времени Δt не зависит от того, сколько их поступило в систему на обслуживание в любой другой промежуток времени, не пересекающийся с данным.

Два простейших потока отличаются друг от друга только интенсивностью – параметром λ, который определяется как математическое ожидание числа требований, поступающих за единицу времени. Во многих производственных задачах массового обслуживания условия формирования требований таковы, что предположения об их ординарности и отсутствии последствия вполне приемлемы.

В то же время предположение о стационарности внушает большие сомнения, а иногда заведомо ошибочно. Такие потоки называются нестационарными простейшими потоками.

Несоблюдение перечисленных свойств простейшего потока требований в производственных условиях не мешает использованию математического аппарата и методов теории массового обслуживания (ориентированных на простейший поток требований) для решения реальных задач. Это объясняется следующими обстоятельствами:

для других видов потоков требований пока не получены простейшие формульные зависимости количественной оценки функционирования систем массового обслуживания;

при расчете средств обслуживания мы ставим исследуемый «простейший» поток требований в более тяжелые условия по сравнению с другими потоками с такой же интенсивностью поступления требований, т.е. результаты расчета будут заведомо приемлемыми;

при сложении нескольких случайных потоков образуется суммарный поток, который по своим характеристикам приближается к простейшему.

Следует также иметь в виду, что при нестационарном потоке требований практические задачи можно решать следующим образом:

весь интервал времени функционирования системы массового обслуживания делится на отрезки, в пределах которых можно считать поток требований постоянным. Для каждого такого отрезка времени проводится анализ работы системы. Например, по сменам суток и др.;

использование ЭВМ для моделирования процесса функционирования системы массового обслуживания.

Простейший поток в теории массового обслуживания играет такую же роль, как нормальный закон распределения случайной величины в теории вероятности.

Если в результате математико-статистической обработки производственных данных доказано, что изучаемый поток требований является простейшим, т.е. стационарным, ординарным и обладающим отсутствием последствия, то для его полного описания достаточно вычислить математическое ожидание (среднее значение) числа требований, поступающих в единицу времени.

Пример 2.1. Одним рабочим опорного диспетчерского пункта обслуживается шесть домов, каждый из которых оборудован одним лифтом. Среднее число домов (лифтов), требующих обслуживания в течение часа, равно трем: $\lambda = 3$. Вычислить вероятность того, что в течение часа ровно k лифтов потребуют обслуживания. Произвести расчеты искомых вероятностей для k = 0,1, … , 6.

Решение. Вероятность того, что в течение часа потребуется обслуживание для k лифтов, вычисляется по формуле

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \frac{1}{2{,}72^3}\cdot\frac{(3\cdot 1)^k}{k!} = 0{,}0497\,\frac{3^k}{k!}\,. \qquad (2.2)$$

Вычисленные значения искомой вероятности при k = 0,1, … , 6 представлены в табл.2.1.

Таблица 2.1

k	0	1	2	3	4	5	6
$P_k(1)$	0,0498	0,1494	0,2241	0,2241	0,1680	0,1008	0,0504

Пример 2.2. Если в условиях прим.2.1 среднее время обслуживания одного лифта равно 10 и 20 *мин* (1/6 и 1/3 *ч.*), то какова вероятность того, что за 10 и 20 *мин*.:

а) не будет работать более k лифтов?

б) не будет работать не менее k лифтов?

в) не будет работать менее k лифтов?

г) будет работать не менее k лифтов?

Решение. Сначала определяем значения вероятности того, что за 10 и 20 *мин*. не будут работать ровно k лифтов, с помощью следующих выражений:

$$P_k\left(\tfrac{1}{6}\right) = e^{-3\cdot\frac{1}{6}} \cdot \frac{\left(3\cdot\frac{1}{6}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2{,}72^{-0{,}5}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = 0{,}606\frac{1}{2^k k!}; \qquad (2.3)$$

$$P_k\left(\tfrac{1}{3}\right) = e^{-3\cdot\frac{1}{3}} \cdot \frac{\left(3\cdot\frac{1}{3}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2{,}72} \cdot \frac{1}{k!} = 0{,}3676\frac{1}{k!}. \qquad (2.4)$$

Результаты расчетов при различных значениях k сведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

k (число неработающих лифтов)	0	1	2	3	4	5	6
l = 6-k (число работающих лифтов)	6	5	4	3	2	1	0
$P_k\left(\frac{1}{6}\right)$	0,606	0,303	0,076	0,013	0,002	0,000	0,000
$P_k\left(\frac{1}{3}\right)$	0,368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003	0,001

Затем, используя данные табл.2.2, определим искомые вероятности:

а) вероятность того, что за 10 и 20 *мин*. не будет работать более k лифтов, определяется по формуле

$$P_{>k}(t) = P_{k+1}(t) + P_{k+2}(t) + \ldots + P_6(t), \qquad (2.5)$$

так, вероятность того, что в течение 10 мин. не будет работать более трех лифтов, определится выражением

$$P_{>2}(t) = P_3(t) + P_4(t) + P_5(t) + P_6(t) =$$

$$= 0{,}013 + 0{,}002 + 0 + 0 = 0{,}015\ ; \qquad (2.6)$$

б) вероятность того, что за 10 и 20 *мин*. не будет работать не менее k лифтов определяется по формуле

$$P_{\geq k}(t) = P_k(t) + P_{k+1}(t) + \ldots + P_6(t), \qquad (2.7)$$

так, вероятность того, что в течение 20 мин. не будет работать не менее трех лифтов, определится выражением

$$P_{\geq 3}\left(\tfrac{1}{3}\right) = P_3\left(\tfrac{1}{3}\right) + P_4\left(\tfrac{1}{3}\right) + P_5\left(\tfrac{1}{3}\right) + P_0\left(\tfrac{1}{3}\right) =$$

$$= 0{,}061 + 0{,}015 + 0{,}003 + 0{,}001 = 0{,}080; \qquad (2.8)$$

в) вероятность того, что за 10 и 20 *мин*. не будет работать менее k лифтов, определяется по формуле

$$P_{<k}(t) = P_{k-1}(t) + P_{k-2}(t) + \ldots + P_0(t), \qquad (2.9)$$

так, вероятность того, что в течение 10 мин. будет работать менее трех лифтов, определится выражением

$$P_{<3}\left(\tfrac{1}{6}\right) = P_2\left(\tfrac{1}{6}\right) + P_1\left(\tfrac{1}{6}\right) + P_0\left(\tfrac{1}{6}\right) =$$

$$= 0{,}606 + 0{,}303 + 0{,}076 = 0{,}985\ ; \qquad (2.10)$$

г) вероятность того, что в течение 10 и 20 мин. будет работать менее l лифтов, определяется по формуле

$$P_{\geq l}(t) = P_0(t) + P_1(t) + \ldots + P_l(t), \qquad (2.11)$$

так, вероятность того, что в течение 20 мин. будет работать не менее трех лифтов, определится выражением

$$P_{\ge 3}\left(\tfrac{1}{3}\right) = P_0\left(\tfrac{1}{3}\right) + P_1\left(\tfrac{1}{3}\right) + P_2\left(\tfrac{1}{3}\right) + P_3\left(\tfrac{1}{3}\right) =$$
$$= 0{,}368 + 0{,}368 + 0{,}184 + 0{,}061 = 0{,}981\,. \qquad (2.12)$$

Результаты расчета всех требуемых вероятностей в прим.2.2 приведены в табл.2.3. Контрольные результаты, полученные с помощью выражений (2.6), (2.8), (2.10) и (2.12), в табл.2.3 выделены полужирным шрифтом.

Таблица 2.3

k	0	1	2	3	4	5	6
$P_{>k}\left(\frac{1}{6}\right)$	0,394	0,091	**0,015**	0,002	0,000	0,000	
$P_{>k}\left(\frac{1}{3}\right)$	0,632	0,264	0,080	0,019	0,004	0,001	
$P_{\ge k}\left(\frac{1}{6}\right)$	1	0,394	0,091	0,015	0,002	0,000	0,000
$P_{\ge k}\left(\frac{1}{3}\right)$	1	0,632	0,264	**0,080**	0,019	0,004	0,001
$P_{<k}\left(\frac{1}{6}\right)$		0,606	0,909	**0,985**	0,998	1	1
$P_{<k}\left(\frac{1}{3}\right)$		0,368	0,736	0,920	0,981	0,996	0,999
$l = 6 - k$	6	5	4	3	2	1	0
$P_{\ge l}\left(\frac{1}{6}\right)$	0,606	0,909	0,985	0,998	1	1	1
$P_{\ge l}\left(\frac{1}{3}\right)$	0,368	0,736	0,920	**0,981**	0,996	0,999	1

Пример 2.3. В условиях прим.2.2 определить, как часто рабочий столкнется с ситуацией, когда:

а) все лифты потребуют обслуживания, т.е. одновременно остановится более пяти лифтов;

б) обслуживание потребуют не менее двух лифтов.

Решение. Для ответов на вопросы примера воспользуемся табл.2.3.

а) Как видно из табл.2.3, вероятности того, что за 10 и 20 *мин*. остановится более 5 лифтов, равны 0 с погрешностью не более 0,001. Поскольку вероятности очень малы, то можно считать, что одновременная остановка всех лифтов – событие невозможное, и рабочий с такой ситуацией в течение рабочей смены не столкнется.

б) Как видно из табл.2.3, вероятности того, что за 10 и 20 *мин*. обслуживание потребуют не менее двух лифтов, соответственно равны: $P_{\geq 2}\left(\frac{1}{6}\right)=0{,}091$ и $P_{\geq 2}\left(\frac{1}{3}\right)=0{,}264$. Покажем, что за семичасовой рабочий день рабочий, обслуживающий лифты, приблизительно 4 – 6 раз встретится с ситуацией, когда в течение 10 и 20 *мин*. потребуется обслужить не менее двух лифтов. Это следует из простых рассуждений. В рабочей смене насчитывается 42 (6 · 7) непересекающихся десятиминутных интервалов и 21 (3 · 7) непересекающихся двадцатиминутных интервалов. Умножая число интервалов на вероятность появления не менее двух требований, мы получим искомые решения, а именно: $42\cdot 0{,}91=3{,}82\approx 4$ (для десятиминутных интервалов); $21\cdot 0{,}264=5{,}544\approx 6$ (для двадцатиминутных интервалов).

Мы рассмотрели три примера, в которых исходное знание интенсивности простейшего потока требований λ позволило ответить на очень важные вопросы. Как определяется интенсивность конкретного потока требований?

Для определения λ конкретного потока требований необходимо иметь статистические данные о поведении потока требований в виде генеральной совокупности чисел, получаемых в результате достаточно длительного наблюдения за потоком. Используя методы построения закона распределения случайной величины, которые изучались в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика», можно получить основной параметр λ (если исследуемая случайная величина распределена по экспоненциальному закону). При этом для построения закона распределения используют не всю генеральную совокупность, а некоторую выборку из нее. Если выборка представляет незначительную часть генеральной совокупности, то это может послужить причиной ошибочного определения λ.

Основой изучения случайной величины является построения статистического ряда распределения по данным выборки.

Статистический (эмпирический) ряд распределения – это таблица, состоящая из двух строк. В первой строке в порядке возрастания указываются диапазоны возможных значений случайной величины; во второй – относительные частоты попадания значений случайной величины, из выборки в указанные диапазоны.

Построение статистического ряда распределения случайной величины производят в следующем порядке. Среди выборочной совокупности данных определяют x_{min} и x_{max}.. Весь диапазон изменения случайной величины разбивают на равные интервалы длиной Δx. Величина Δx определяется следующим образом:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}, \tag{2.13}$$

где k определяется из табл.2.4.

Таблица 2.4 – Таблица выбора числа интервалов в статистическом ряде распределения в зависимости от объема выборки

Объем выборки n	100	200	400	600	800	1000	1500	2000
Количество интервалов k	12	16	20	24	27	30	35	37

Затем определяют частоты попадания значений случайной величины x в i-й интервал – m_i ($i = 1, 2, \ldots, k$), после чего вычисляют относительные частоты $P_i = \frac{m_i}{n}$, где n – объем выборки. Результаты расчета сводят в табл.2.5, которая и представляет собой статистический ряд распределения исследуемой случайной величины x.

Таблица 2.5 – Статистический ряд распределения

Интервалы случайной величины	$(x_{\min}, x_{\min}+\Delta x)$	$(x_{\min}+\Delta x, x_{\min}+2\Delta x)$	$\cdots$	$(x_{\min}+(k-1)\Delta x, x_{\max})$
Относительные частоты	P_1	P_2	$\cdots$	P_k

Статистический ряд распределения позволяет построить гистограмму относительных частот. Для этого определяют плотность относительных частот по формуле

$$H_i = \frac{P_i}{\Delta x}. \tag{2.14}$$

Взяв H_i в качестве ординаты на i–м интервале, получим гистограмму относительных частот.

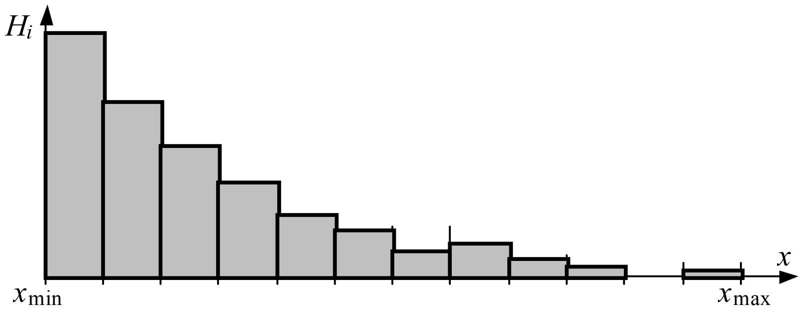


Рис.2.2 – Пример гистограммы относительных частот при выборке объемом n = 100 для случайной величины x, распределенной по экспоненциальному закону

По виду гистограммы (если она аналогична гистограмме, изображенной на рис.2.2) убеждаются в экспоненциальном характере закона распределения случайной величины x. После чего определяют параметр λ по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\widetilde{m}_n}, \tag{2.15}$$

где $\widetilde{m}_n$ – среднее значение случайной величины по данным выборочной совокупности, $\widetilde{m}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Применительно к пуассоновскому распределению, если промежуток времени между поступлением требований $(0, t)$ будет длиться меньше t единиц времени, то вероятность того, что в систему не поступит ни одного требования определится по формуле

$$P_0(t) = \ell^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} = \ell^{-\lambda t}. \tag{2.16}$$

Вероятность противоположного события, когда в систему поступает хотя бы одно требование, распределение промежутков, свободных от требований, описывается показательным интегральным законом вида

$$F(t) = P(T < t) = 1 - \ell^{-\lambda t}. \tag{2.17}$$

Плотность распределения, которая представляет собой первую производную от интегральной функции, имеет вид

$$f(t) = F'(t) = \lambda\ell^{-\lambda t}. \tag{2.18}$$

Таким образом, промежутки времени между требованиями подчиняются показательному закону распределения с параметром λ. При этом можно утверждать и обратное, если время между требованиями распределено по показательному закону, то поток требований подчиняется закону Пуассона, т.е.

$$Pk(t) = \ell^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \leftrightarrow f(t) = \lambda\ell^{-\lambda t}. \tag{2.19}$$

Полной характеристикой *времени обслуживания* является закон распределения, параметры которого также определяют на основе производственных данных.

Решение такой задачи проводится при ограниченном количестве наблюдений путем выравнивания эмпирического ряда распределения и нахождения теоретической кривой, которая описывает уже не выборочную, а генеральную совокупность.

Последовательность расчетов:

составление статистического ряда распределения;

построение гистограммы и предположение о виде закона распределения опытных данных;

вычисление параметра (в общем случае – параметров) предполагаемого закона распределения;

определение соответствия теоретической кривой распределения эмпирическим данным (проверка гипотезы о соответствии).

Частично процедура расчета, кроме последнего пункта, уже была рассмотрена ранее.

Тема 2.4. Показатели эффективности систем массового обслуживания

Показатели эффективности систем массового обслуживания делятся на показатели *технические*, характеризующие качество и условия работы обслуживающей системы, и показатели *экономические*, отражающие экономические особенности системы.

Показатели первой группы обычно формируют на основе полученных из расчетов значений вероятностей состояний системы. Показатели второй группы рассчитывают на основе показателей первой группы.

2.4.1. Технические показатели эффективности систем массового обслуживания

Среди технических показателей можно выделить следующие:

1) *Вероятность отказа в обслуживании*. Вероятность того, что поступающее в систему требование откажется присоединяться к очереди и теряется системой – $P_{\text{отк}}$. Этот показатель для системы массового обслуживания с отказами равен вероятности того, что в системе находится столько требований, сколько она содержит каналов обслуживания:

$$P_{\text{отк}} = P_r, \tag{2.20}$$

где r – число каналов обслуживания.

Для системы с ограниченной длиной очереди $P_{\text{отк}}$ равно вероятности того, что в системе находится $r + k$ требований:

$$P_{\text{отк}} = P_{r+k}, \tag{2.21}$$

где k – допустимая длина очереди.

Противоположным показателем является вероятность обслуживания требования

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк.}} \tag{2.22}$$

2) *Среднее количество требований, ожидающих обслуживания*,

$$M_{\text{ож}} = \sum_{i=r+1}^{r+k} (i - r) P_i , \tag{2.23}$$

где P_i – вероятность того, что в системе находится i требований.

При условии простейшего потока требований и экспоненциального закона распределения времени обслуживания формула (2.23) принимает следующий вид:

для систем с ограниченной длиной очереди

$$M_{\text{ож}} = \frac{P_0 \rho^r}{r!} \sum_{i=1}^{k} i \left(\frac{\rho}{r} \right)^i , \tag{2.24}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, λ – интенсивность входящего потока требований (среднее число требований, поступающих в единицу времени), μ – интенсивность обслуживания (среднее число обслуженных требований в единицу времени);

для систем с ожиданием

$$M_{\text{ож}} = \frac{P_0 \rho^{r+1}}{r \cdot r!} \cdot \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\rho}{r}\right)^2}, \tag{2.25}$$

3) *Относительная и абсолютная пропускные способности* системы, которые определяются по следующим формулам:

относительная пропускная способность – по формуле

$$Q = 1 - P_{\text{отк.}} \tag{2.26}$$

абсолютная пропускная способность – по формуле

$$A = \lambda Q. \tag{2.27}$$

4) *Среднее число занятых обслуживанием каналов* в случае экспоненциального характера потока требований и времени обслуживания

$$\bar{r}_з = \rho Q. \tag{2.28}$$

Для систем массового обслуживания с отказами среднее число занятых обслуживанием каналов можно найти по формуле

$$\bar{r}_з = \sum_{i=1}^{r} i \cdot P_i. \tag{2.29}$$

5) *Общее количество требований*, находящихся в системе *M*. Данную величину определяют следующим образом:

для систем массового обслуживания с отказами

$$M = r_з, \tag{2.30}$$

для систем массового обслуживания с ограниченной длиной очереди

$$M = r_з + M_{\text{ож.}} \tag{2.31}$$

6) *Среднее время ожидания требованиями начала обслуживания*. Если известна функция распределения вероятности времени ожидания требованием начала обслуживания

$$F(t) = P(T_{\text{ож}} < t)\,, \tag{2.32}$$

то среднее время ожидания требованиями начала обслуживания $\overline{T}_{\text{ож}}$ определяется как математическое ожидание случайной величины $T_{\text{ож}}$

$$\overline{T}_{\text{ож}} = M\left[T_{\text{ож}}\right] = \int_0^\infty t dF\,; \tag{2.33}$$

при показательном (экспоненциальном) законе распределения требований во входящем потоке $\overline{T}_{\text{ож}}$ можно определить по формуле

$$\overline{T}_{\text{ож}} = \frac{M_{\text{ож}}}{\lambda}\,. \tag{2.34}$$

2.4.2. Экономические показатели эффективности систем массового обслуживания

Показатели, характеризующие экономические особенности систем массового обслуживания, формируют обычно в соответствии с конкретным видом системы и ее назначением. Одним из общих показателей является *экономическая эффективность системы*

$$E = P_{\text{обсл}}\,\lambda\, cT - G\,, \tag{2.35}$$

где c – средний экономический эффект, полученный при обслуживании одного требования, T – рассматриваемый интервал времени, G – величина потерь в системе.

Последнюю величину (потери) можно определить следующим образом:

для систем с отказами

$$G = \left(c_{\text{э}} r_{\text{з}} + c_{\text{у}} P_{\text{отк}} \lambda + c_{\text{п}} r_{\text{св}}\right) T\,, \tag{2.36}$$

где $c_{\text{э}}$ – стоимость эксплуатации одного канала в единицу времени, $c_{\text{у}}$ – стоимость убытков в результате ухода требований из системы в единицу времени, $c_{\text{п}}$ – стоимость единицы времени простоя канала обслуживания, $r_{\text{св}}$ – среднее число простаивающих каналов (свободных), $r_{\text{св}} = r - r_{\text{з}}$;

для систем с ожиданием

$$G = \left(c_э r_з + c_{ож} M_{ож} \lambda + c_п r_{св}\right) T \,, \tag{2.37}$$

где $c_{ож}$ – стоимость потерь, связанных с простоем требования в очереди в единицу времени.

Тема 2.5. Цепи Маркова и уравнения Колмогорова для систем массового обслуживания

Для получения и графической интерпретации математических моделей систем массового обслуживания их удобно представлять в виде цепей Маркова. Цепь Маркова представляет собой размеченный граф состояний, т.е. ориентированный граф в виде цепочки прямоугольных блоков (вершин) соединенных функциональными связями (направленными дугами).

Вершина графа интерпретируется как одно из возможных состояний системы. Состояние системы массового обслуживания будем связывать с вероятностью числа требований, находящихся в системе:

в системе нет ни одного требования – вероятность состояния P_0;

в системе находится одно требование – вероятность состояния P_1;

. . .

в системе находится m требований – вероятность состояния P_m.

Дуги графа интерпретируются как процессы перехода из одного состояния в другое. Процессы перехода будем связывать с интенсивностью их появления в системе. При этом будем считать, что поток входящих требований является простым (пуассоновским), а время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону. Каждый канал может обслуживать только одно требование.

Рассмотрим Марковские цепи для наиболее часто встречающихся в инженерной практике систем массового обслуживания.

2.5.1. Разомкнутая одноканальная система массового обслуживания с неограниченным временем ожидания

Цепь Маркова для данной системы показана на рис. 2.3.

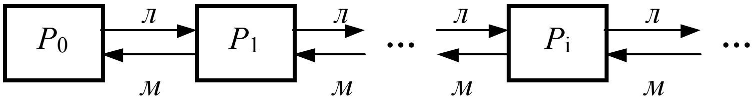


Рис.2.3

Каждый прямоугольный блок, количественно оцениваемый вероятностью состояния, определяет одно из возможных состояний. Стрелки (дуги) показывают, в какое состояние система может перейти и с какой интенсивностью.

Поскольку время ожидания в системе неограниченно, то система может накапливать бесконечное множество требований, ожидающих обслуживания. Поэтому цепь Маркова бесконечна. Количество требований в системе i может изменяться от 0 до ∞. Поскольку поток требований ординарный, то требования поступают по одному.

Первый прямоугольник с вероятностью P_0 определяет состояние системы массового обслуживания, при котором ее единственный канал простаивает из-за отсутствия требований на обслуживание. Из этого положения система может перейти с интенсивностью λ только в состояние P_1, тогда система будет занята обслуживанием требования. Из состояния P_1 система может с интенсивностью μ перейти в состояние P_0 (в системе находилось одно требование, но оно было обслужено раньше, чем появилось новое) и стать свободной или с интенсивностью λ – в состояние P_2. В этом случае в системе будет находиться 2 требования, одно из которых – в состоянии ожидания (очередь с одним требованием). Из состояния P_2 система может с интенсивностью μ перейти в состояние P_1 и быть занятой обслуживанием одного требования с ликвидацией очереди либо с интенсивностью λ перейти в состояние P_3. В этом случае в системе будет находиться 3 требования, два из которых – в состоянии ожидания обслуживания, и т.д.

2.5.2. Разомкнутая многоканальная система массового обслуживания с неограниченным временем ожидания

Цепь Маркова для данной системы показана на рис. 2.4.

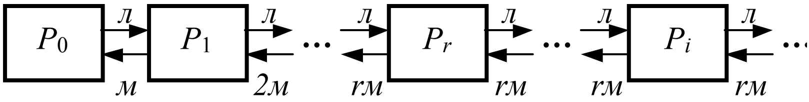


Рис.2.4

Система может одновременно обслуживать от 0 до r требований.

В отличие от одноканальной в r-канальной системе очередь образовывается только тогда, когда система находится в состоянии P_r (все каналы заняты) и при этом новое требование поступает в систему раньше, чем освободится какой-нибудь из занятых каналов.

Когда все каналы заняты (состояние P_r) или очередь не пустая (состояние P_i, $i > r$), интенсивность обслуживания является величиной постоянной и равной $r\mu$.

2.5.3. Разомкнутая одноканальная система массового обслуживания с ограниченным временем ожидания

Цепь Маркова для данной системы показана на рис. 2.5.

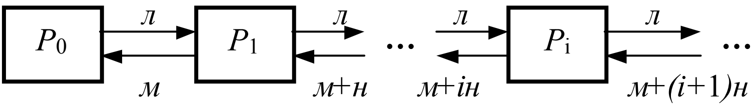


Рис.2.5

В системах массового обслуживания с ограниченным временем ожидания время ожидания в очереди каждого требования ограничено случайной величиной $t_{\text{ож}}$, среднее значение которого $\bar{t}_{\text{ож}}$.

Величина, обратная среднему времени ожидания, означает количество требований, покидающих очередь в единицу времени, вызванное появлением в очереди одного требования: $\nu = \dfrac{1}{\bar{t}_{\text{ож}}}$.

При наличии в очереди i требований интенсивность потока покидающих очередь требований составляет $i\nu$ (см. рис.2.5).

2.5.4. Разомкнутая многоканальная система массового обслуживания с ограниченным временем ожидания

Цепь Маркова для данной системы показана на рис. 2.6.

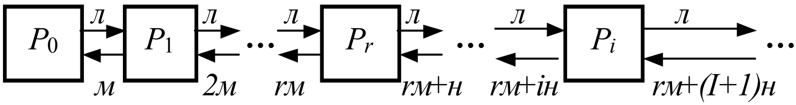


Рис.2.6

Система может одновременно обслуживать от 0 до r требований.

В отличие от одноканальной в r-канальной системе очередь образовывается только тогда, когда система находится в состоянии P_r (все каналы заняты) и при этом новое требование поступает в систему раньше, чем освободится какой-нибудь из занятых каналов.

Когда все каналы заняты (состояние P_r) или очередь не пустая (состояние P_i, $i > r$), интенсивность обслуживания не является величиной постоянной и определяется выражением $r\mu+(i+1)\nu$.

2.5.5. Разомкнутая одноканальная система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди

Цепь Маркова для данной системы с допустимой длиной очереди, равной k, показана на рис. 2.7.

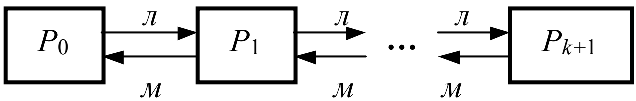


Рис.2.7

В системах массового обслуживания с ограниченной длиной очереди число требований в системе может изменяться от 0 до $k+1$. Когда число требований достигает величины $k+1$, одно из них находится на обслуживании, а k – в очереди, ожидая обслуживания.

2.5.6. Разомкнутая многоканальная система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди

Цепь Маркова для данной системы с допустимой длиной очереди, равной k, показана на рис. 2.8.

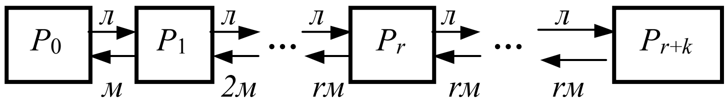


Рис.2.8

Система может одновременно обслуживать от 0 до r требований.

В отличие от одноканальной в r-канальной системе очередь образовывается только тогда, когда система находится в состоянии P_r (все каналы заняты), и при этом новое требование поступает в систему раньше, чем освободится какой-нибудь из занятых каналов.

Когда все каналы заняты (состояние P_r) или очередь не пустая (состояние P_i, $r < i \le (r + k)$), интенсивность обслуживания является величиной постоянной и равной $r\mu$.

2.5.7. Замкнутая одноканальная система массового обслуживания с ограниченным потоком требований

В замкнутых системах массового обслуживания источник требований находится внутри системы, при этом интенсивность потока требований зависит от состояния самой системы. Чаще всего потоком требований в такой системе является поток неисправностей от некоторой группы работающих устройств в количестве m. В качестве канала обслуживания могут выступать и люди.

Цепь Маркова для замкнутой одноканальной системы массового обслуживания с ограниченным потоком требований показана на рис. 2.9.

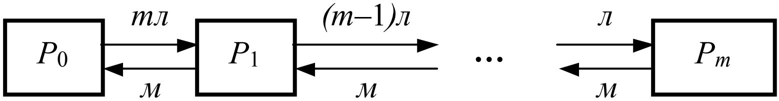


Рис.2.9

Когда в систему поступает требование на обслуживание, то число работающих устройств уменьшается на единицу. Соответственно уменьшается интенсивность поступления нового требования.

2.5.8. Замкнутая многоканальная система массового обслуживания с ограниченным потоком требований

Цепь Маркова для данной системы показана на рис. 2.10.

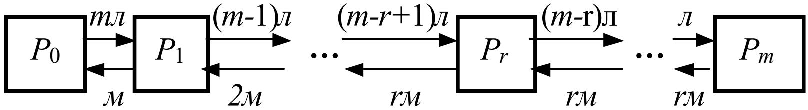


Рис.2.10

Система может одновременно обслуживать от 0 до r требований.

В отличие от одноканальной в r-канальной системе очередь образовывается только тогда, когда система находится в состоянии P_r (все каналы заняты), и при этом новое требование поступает в систему раньше, чем освободится какой-нибудь из занятых каналов.

Когда все каналы заняты (состояние P_r) или очередь не пустая (состояние P_i, $r < i \le m$), интенсивность обслуживания является величиной постоянной и равной $r\mu$.

2.5.9. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

Цепь Маркова для данной системы показана на рис.2.11.

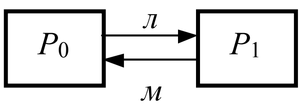


Рис.2.11

В одноканальной системе с отказами, когда она находится в состоянии P_1 (единственный канал занят), новое требование, поступающее до освобождения канала, безвозвратно теряется.

2.5.10. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

Цепь Маркова для данной системы показана на рис.2.12.

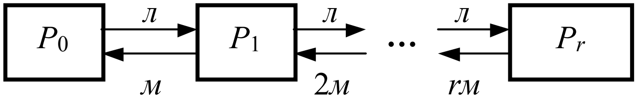


Рис.2.12

В многоканальной системе с отказами новое требование безвозвратно теряется только тогда, когда система находится в состоянии P_r (все каналы обслуживания заняты).

Интенсивность выходного потока требований (обслуженных) зависит от числа занятых каналов: чем больше каналов занято обслуживанием, тем выше интенсивность.

2.5.11. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний

Системы, представленные в виде непрерывной цепи Маркова, обычно исследуют с помощью уравнений Колмогорова для вероятностей состояний.

Плотностью вероятности перехода λ_{ij} из состояния, соответствующего вероятности P_i, в состояние, соответствующее вероятности P_j, называется предел отношения вероятности этого перехода за время Δt к длине промежутка Δt, когда последний стремится к нулю:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, \qquad (2.38)$$

где $P_{ij}(\Delta t)$ – вероятность того, что система, находящаяся в момент времени t в состоянии P_i, за время Δt перейдет в состояние P_j.

Марковская непрерывная цепь называется *однородной*, если плотности вероятностей λ_{ij} не зависят от времени t, в противном случае она называется *неоднородной*.

Для однородных марковских непрерывных цепей, характеризующих процессы «гибели» и «размножения», уравнения Колмогорова имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{dP_0}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t),\\
&\frac{dP_1}{dt} = \lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1(t) + \lambda_{12}P_2(t),\\
&\cdots\\
&\frac{dP_i}{dt} = \lambda_{i-1,i}P_{i-1}(t) - (\lambda_{i,i-1} + \lambda_{i,i+1})P_i(t) + \lambda_{i,i+1}P_{i+1}(t), \quad i = \overline{1,n},\\
&\cdots
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

где $P_i(t)$ – вероятность состояния, когда в системе находится i требований в момент времени t, $i = 1,2,\ldots, n+1$; $(n+1)$ – общее число возможных состояний.

При гипотезе о стационарном режиме работы системы (вероятности состояний не зависят от времени) уравнения Колмогорова (2.39) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&-\lambda_{01}P_0 + \lambda_{10}P_1 = 0,\\
&\lambda_{01}P_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1 + \lambda_{12}P_2 = 0,\\
&\cdots\\
&\lambda_{i-1,i}P_{i-1} - (\lambda_{i,i-1} + \lambda_{i,i+1})P_i + \lambda_{i,i+1}P_{i+1} = 0, \quad = \overline{1,n},\\
&\cdots
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

В большинстве практических задач оказывается допустимым предположение о стационарном режиме работы систем. Поэтому для получения математических моделей систем следует использовать уравнения Колмогорова в виде (2.40).

Тема 2.6. Разомкнутые системы массового обслуживания

2.6.1. Разомкнутая система массового обслуживания с неограниченным временем ожидания

Для разомкнутых систем массового обслуживания с непрерывным потоком требований и неограниченным временем ожидания обслуживания характерны следующие особенности:

бесконечное число возможных состояний i, которое связано с числом требований в системе;

ограниченное число r обслуживающих каналов;

каждый канал способен одновременно обслуживать только одно требование;

при наличии свободного канала поступающее требование немедленно обслуживается;

требование, поступившее в систему в момент, когда все r каналов обслуживания заняты, становится в очередь ожидания обслуживания;

теоретически очередь требований, ожидающих обслуживание, бесконечна.

Задача определения показателей функционирования такой системы решается при наличии пуассоновского распределения потока требований и показательного закона распределения времени обслуживания. Исходными параметрами решения задачи служат:

λ – среднее количество требований, поступающих на обслуживание в единицу времени;

μ – средняя производительность обслуживающего канала (в тех же единицах измерения, что и поток требований);

r – число обслуживающих каналов.

Вышеуказанные параметры определяются путем обработки производственных наблюдений за время производительной работы сопряженных рабочих процессов и звеньев производства.

Для решения задач данного типа используются формулы Эрланга.

1. Отношение интенсивности входного потока требований к выходному

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (2.41)$$

2. *Вероятности одновременного пребывания* i *требований* в системе P_i определяются по следующим формулам:

вероятность одновременного пребывания в системе 1-го требования

$$P_1 = \rho P_0, \qquad (2.42)$$

где P_0 – вероятность отсутствия требований в системе;

вероятность одновременного пребывания в системе 2-х требований

$$P_2 = \frac{\rho}{2} P_1 = \frac{\rho^2}{2!} P_0, \qquad (2.43)$$

вероятность одновременного пребывания в системе 3-х требований

$$P_3 = \frac{\rho}{3} P_2 = \frac{\rho^3}{3!} P_0, \qquad (2.44)$$

. . .

вероятность одновременного пребывания в системе r требований

$$P_r = \frac{\rho}{r} P_{r-1} = \frac{\rho^r}{r!} P_0, \qquad (2.45)$$

вероятность одновременного пребывания в системе $r+1$ требования

$$P_{r+1} = \frac{\rho}{r} P_r = \frac{\rho^{r+1}}{r!\,r} P_0, \qquad (2.46)$$

. . .

вероятность одновременного пребывания в системе i требований $(i>r)$

$$P_i = \frac{\rho}{r} P_{i-1} = \frac{\rho^i}{r!\,r^{i-r}} P_0, \quad i = \overline{r+1,\infty}, \qquad (2.47)$$

. . .

Начиная с $i=r$, последовательные значения P_i образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{\rho}{r}$. Прогрессия будет сходящейся только в случае, если знаменатель прогрессии окажется меньше единицы. В результате получаем необходимое условие функционирования разомкнутой системы: $\frac{\rho}{r} \leq 1$, отсюда $r \geq \rho$.

3. Вероятность отсутствия требований в системе P_0

Сумма вероятностей всех состояний системы складывается из двух составляющих и равна единице:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = \sum_{i=0}^{r-1} P_i + \sum_{i=r}^{\infty} P_i = 1. \qquad (2.48)$$

Первая составляющая в (2.48) представляет собой вероятность того, что в системе свободен от обслуживания хотя бы один канал. С учетом соотношений (2.42) – (2.45) эта вероятность определится следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{r} P_i = \frac{\rho^0}{0!} P_0 + \frac{\rho^1}{1!} P_0 + \frac{\rho^2}{2!} P_0 + \cdots + \frac{\rho^r}{r!} P_0 = P_0 \sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!}. \qquad (2.49)$$

Вторая составляющая в (2.48) представляет собой сумму бесконечной убывающей геометрическую прогрессию с начальным членом $P_{r+1} = \frac{\rho^{r+1}}{r!r} P_0$ (см. формулу (2.46)) и знаменателем $\frac{\rho}{r}$:

$$\sum_{i=r+1}^{\infty} P_i = P_0 \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)}. \qquad (2.50)$$

Подставляя (2.49) и (2.50) в (2.48), получаем

$$\sum_{i=0}^{r} P_0 \frac{\rho^i}{i!} + P_0 \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)} = 1. \qquad (2.51)$$

Откуда вероятность отсутствия требований в многоканальной разомкнутой системе массового обслуживания с неограниченным временем ожидания

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)} \right)^{-1}. \tag{2.52}$$

Для одноканальной системы, когда $r = 1$, выражение (2.52) упрощается

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{1-\rho} \right)^{-1} = 1 - \rho. \tag{2.53}$$

4. Вероятность появления очереди. Занятость всех r каналов обслуживания, т.е. наличие в системе r и более требований, означает появление очереди. Тогда вероятность появления очереди представляет собой сумму вероятностей того, что в системе находится не менее r требований:

$$P_{\text{ож}} = \sum_{i=r}^{\infty} P_i. \tag{2.54}$$

Сумма (2.54) – это сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с начальным членом $P_r = \frac{\rho^r}{r!} P_0$ (см. формулу (2.45)) и знаменателем $\frac{\rho}{r}$:

$$P_{\text{ож}} = \sum_{i=r}^{\infty} P_i = P_0 \frac{\rho^r}{(r-1)!(r-\rho)}. \tag{2.55}$$

Для одноканальной системы вероятность появления очереди определится как вероятность противоположного состояния по отношению к состоянию, когда единственный канал обслуживания свободен:

$$P_{\text{ож}} = 1 - P_0 = 1 - (1-\rho) = \rho. \tag{2.56}$$

5. *Средняя длина очереди* (см. формулу (2.25))

$$M_{\text{ож}} = \frac{P_0 \rho^{r+1}}{r \cdot r!} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2} = \frac{P_r \rho}{r} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2}. \tag{2.57}$$

Для одноканальной системы средняя длина очереди

$$M_{\text{ож}} = \frac{P_0 \rho^2}{(1-\rho)^2}. \tag{2.58}$$

6. *Среднее время ожидания* обслуживания (см. формулу (2.34))

$$\overline{T}_{ож} = \frac{M_1}{\lambda}.$$

7. *Среднее число свободных каналов*

$$C = \sum_{i=0}^{r} P_i (r - i). \tag{2.59}$$

8. *Коэффициент простоя канала*

$$\gamma = \frac{C}{r}. \tag{2.60}$$

Пример 2.1. Поточную линию по ежедневному обслуживанию туристов в гостинице обслуживает бригада операторов. Момент поступления туристов на обслуживание имеет случайный характер. Есть основание полагать, что поток требований на обслуживание подчиняется пуассоновскому закону распределения, а время обслуживания – показательное. Требуется оценить работу бригады, если число операторов = 4, λ=10 туристов в час, а μ=2,5 туриста в час. Стоимость часа простоя номера $C_{\text{н}}$ =5,2 грн., тарифная ставка оператора $C_{\text{ст}}$ =1,7 грн.

Решение.

Проверим условие функционирования разомкнутой системы – число обслуживающих каналов (операторов) r должно быть больше или равно величине $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. В нашем случае $\rho = \frac{10}{2,5} = 4$, r по условию также равно 4. Следовательно, условие функционирования системы не нарушено.

Система будет работать, но большинство показателей функционирования системы будут неопределенны, поскольку формулы (2.52) - – (2.60) были получены при условии, что вторая составляющая суммы (2.48) представляет собой бесконечной убывающей геометрическую прогрессию. В условиях задачи знаменатель прогрессии $\frac{\rho}{r}$ равен единице. В этом случае вероятность образования очереди равна также единице, а вероятность того, что хотя бы один канал обслуживания будет свободен, равна нулю.

Пример 2.2. Пусть в условиях прим.2.1 требуется оценить работу бригады, если число операторов $r = 5$.

Решение.

1. Проверим условия функционирования разомкнутой системы - – число обслуживающих каналов (операторов) r должно быть больше или равно величине $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. В нашем случае $\rho = \frac{10}{2,5} = 4$; по условию r = 5. Поскольку $r > \rho$, то условие функционирования системы выполняется.

2. Определим вероятности одновременного поступления i требований (туристов) по формуле $P_i = \frac{1}{i!}\rho^i P_0$:

$$P_0 = 1 \cdot P_0;$$

$$P_1 = \frac{1}{1!}4^1 P_0 = 4\,P_0;$$

$$P_2 = \frac{1}{2!}4^2 P_0 = 8\,P_0;$$

$$P_3 = \frac{1}{3!}4^3 P_0 = 10,6667\,P_0;$$

$$P_4 = \frac{1}{4!}4^4 P_0 = 10,6667\,P_0;$$

$$P_5 = \frac{1}{5!}4^5 P_0 = 8,5333\,P_0;$$

$$\sum_{i=0}^{r} P_i = 42,8667 P_0.$$

3. Вероятность P_0 того, что все операторы простаивают, определим по формуле (2.52)

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)} \right)^{-1} = \left(42{,}8667 + \frac{4^6}{5!(5-4)} \right)^{-1} = 0{,}013$$

.

4. Вероятность образования очереди определим по формуле (2.55)

$$P_{\text{ож}} = P_0 \frac{\rho^r}{(r-1)!(r-\rho)} = 0{,}013 \frac{4^5}{(5-1)!(5-4)} = 0{,}5547 \text{, или}$$

$$55{,}47\%.$$

5. Среднюю длину очереди определим по формуле (2.57)

$$M_{\text{ож}} = \frac{P_0 \rho^{r+1}}{r \cdot r!} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2} = \frac{0{,}013 \cdot 4^6}{5 \cdot 5!} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{5}\right)^2} = 2{,}22 \text{ } \textit{туриста.}$$

6. Среднее время ожидания каждым туристом начала обслуживания определим по формуле (2.34)

$$\overline{T}_{\text{ож}} = \frac{2{,}22}{10} = 0{,}222 \text{ } \textit{ч.}, \quad \text{или} \quad 13 \text{ } \textit{мин.}$$

7. Среднее число простаивающих операторов определим по формуле (2.59)

$$C = \sum_{i=0}^{r} P_r (r-i) = 0{,}013 \cdot 5 + 4 \cdot 0{,}013 \cdot 4 + 8 \cdot 0{,}013 +$$
$$+ 10{,}667 \cdot 0{,}013 \cdot 2 + 10{,}667 \cdot 0{,}013 \cdot 1 = 1{,}002 \text{ } \textit{оп.}$$

8. Коэффициент простоя операторов определим по формуле (2.60)

$$\gamma = \frac{C}{r} = \frac{1{,}002}{5} = 0{,}2 \text{, или } 20\% \text{ рабочего времени.}$$

В связи с большой вероятностью образования очереди и ее средней длиной целесообразно численность операторов, обслуживающих поток туристов, увеличить до шести.

Пример 2.3. Пусть в условиях прим.2.1 требуется оценить работу бригады, если число операторов $r = 6$.

Решение.

1. Проверим условие функционирования разомкнутой системы. В нашем случае $\rho = \frac{10}{2,5} = 4$; по условию $r = 6$. Поскольку $r > \rho$, то условие функционирования системы выполняется.

2. Вероятности одновременного поступления i требований (туристов):

$$P_0 = 1 \cdot P_0;$$

$$P_1 = \frac{1}{1!} 4^1 P_0 = 4\, P_0;$$

$$P_2 = \frac{1}{2!} 4^2 P_0 = 8\, P_0;$$

$$P_3 = \frac{1}{3!} 4^3 P_0 = 10,6667\, P_0;$$

$$P_4 = \frac{1}{4!} 4^4 P_0 = 10,6667\, P_0;$$

$$P_5 = \frac{1}{5!} 4^5 P_0 = 8,5333\, P_0;$$

$$P_6 = \frac{1}{6!} 4^6 P_0 = 5,6889\, P_0;$$

$$\sum_{i=0}^{r} P_i = 48,5556 P_0.$$

3. Вероятность P_0 того, что все операторы простаивают,

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)} \right)^{-1} = \left(48{,}5556 + \frac{4^7}{6!(6-4)} \right)^{-1} = 0{,}0167 .$$

4. Вероятность образования очереди

$$P_{ож} = P_0 \frac{\rho^r}{(r-1)!(r-\rho)} = 0{,}0167 \frac{4^6}{(6-1)!(6-4)} = 0{,}2850, \text{ или}$$

$$28{,}5\%.$$

5. Средняя длина очереди

$$M_{ож} = \frac{P_0 \rho^{r+1}}{r \cdot r!} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2} = \frac{0{,}0167 \cdot 4^7}{6 \cdot 6!} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{6}\right)^2} = 0{,}57 \textit{ туриста}.$$

6. Среднее время ожидания каждым туристом начала обслуживания

$$\overline{T}_{ож} = \frac{0{,}57}{10} = 0.057 \textit{ ч.}, \quad \text{или} \quad 3{,}42 \textit{ мин}.$$

7. Среднее число простаивающих операторов

$$C = \sum_{i=0}^{r} P_r (r - i) = 0{,}0167 \cdot 6 + 4 \cdot 0{,}0167 \cdot 5 + 8 \cdot 0{,}0167 \cdot 4 +$$
$$+ 10{,}6667 \cdot 0{,}0167 \cdot 3 + 10{,}6667 \cdot 0{,}0167 \cdot 2 +$$
$$+ 8{,}5333 \cdot 0{,}0167 \cdot 1 = 2{,}0018 \textit{ оп}.$$

8. Коэффициент простоя операторов

$$\gamma = \frac{C}{r} = \frac{2{,}0018}{6} = 0{,}3336, \text{ или } 33{,}36\% \text{ рабочего времени.}$$

Целесообразности увеличения численности рабочих необходимо дать технико-экономическое обоснование. Обоснование производится путем сопоставления убытков от простоя туристов в очереди с дополнительными затратами, связанными с содержанием штата операторов гостиницы (выплата заработной платы, обеспечение жильем, предоставление транспорта и др.).

Обоснуем увеличение численности операторов в *прим.2.3* по сравнению с *прим.2.2*, исходя из стоимости часа простоя номера гостиницы (туриста) и часовой тарифной ставки оператора. Для этого составим табл.2.6.

Таблица 2.6

Численность операторов r	Убытки гостиницы $C_{\text{н}}M_{\text{ож}} + tC$ (*грн.*)
5	$5{,}2 \cdot 2{,}22 + 1{,}7 \cdot 1{,}002 = 13{,}25$
6	$5{,}2 \cdot 0{,}57 + 1{,}7 \cdot 2{,}0018 = 6{,}65$

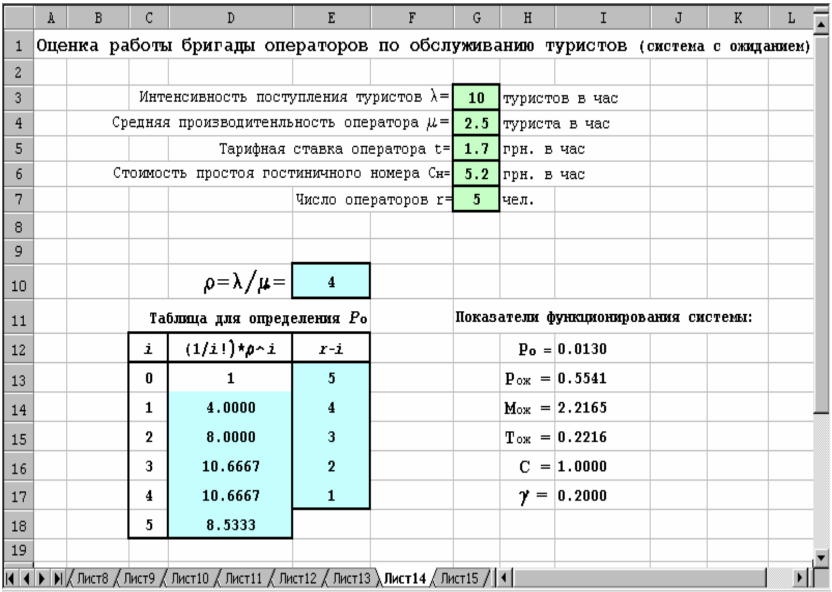
Следовательно, убытки предприятия (гостиницы) значительно снизятся, если туристов будет обслуживать бригада операторов из шести человек, но окончательные выводы можно сделать, только выполнив комплексное обследование предприятия.

2.6.2. Компьютерный расчет показателей разомкнутой системы массового обслуживания с неограниченным временем ожидания

Расчет показателей систем массового обслуживания любого типа требует значительных временных затрат на проведение сложных вычислительных процедур. Чтобы значительно сократить время расчета показателей (на несколько порядков!) и устранить ошибочные действия, свойственные человеку, выполняющему рутинные вычислительные процедуры, следует использовать компьютерную технику.

Для компьютерного расчета показателей разомкнутой стационарной системы массового обслуживания с неограниченным временем ожидания рекомендуется использовать информационную систему *Microsoft Excel,* обладающую мощными средствами выполнения табличных вычислительных процедур. Рассмотрим использование информационной системы *Microsoft Excel* для расчета показателей систем в рамках *прим.2.2 – 2.3*.

На рис.2.13 показана электронная таблица для проведения расчетов показателей пятиканальной системы массового обслуживания с неограниченным временем ожидания (см. прим.2.2).



Оценка работы бригады операторов по обслуживанию туристов (система с ожиданием)

Интенсивность поступления туристов λ=	10	туристов в час
Средняя производительность оператора μ=	2.5	туриста в час
Тарифная ставка оператора t=	1.7	грн. в час
Стоимость простоя гостиничного номера Сн=	5.2	грн. в час
Число операторов r=	5	чел.

$\rho=\lambda/\mu=$ 4

Таблица для определения P_0

i	$(1/i!)*\rho$^i	$r-i$
0	1	5
1	4.0000	4
2	8.0000	3
3	10.6667	2
4	10.6667	1
5	8.5333	

Показатели функционирования системы:

P_0 =	0.0130
$P_{ож}$ =	0.5541
$M_{ож}$ =	2.2165
$T_{ож}$ =	0.2216
C =	1.0000
γ =	0.2000

Лист8 / Лист9 / Лист10 / Лист11 / Лист12 / Лист13 / Лист14 / Лист15

Рис.2.13

В электронной таблице предусмотрено следующее распределение ячеек для исходных данных:

ячейка G3 – для интенсивности входного потока требований $\lambda = 10$;

ячейка G4 – для интенсивности выходного потока требований $\mu = 2.5$;

ячейка G5 – для тарифной ставки оператора $t = 1.7$;

ячейка G6 – для стоимости простоя гостиничного номера $C_{н} = 5.2$;

ячейка G7 – для числа каналов обслуживания $r = 5$;

ячейки C13:C18 – для значений величины $i = 0,1,\ldots, 5$;

ячейка D13 – для константы 1;

В электронной таблице предусмотрена запись следующих формул для получения расчетных данных:

формула =G3/G4 в ячейке E10 – для расчета величины ρ;

формула =D13*$E$10/C14 в ячейке D14 – для расчета величины $\frac{\rho^i}{i!}$ при $i = 1$;

формула =5–C13 в ячейке E13 – для расчета величины $r - i$ при $i = 0$;

формула =1/(СУММ(D13:D17)+(D18/(1–$E$10/G7))) в ячейке I12 – для расчета величины $P_{\text{о}}$;

формула =D18*I12/(1–$E$10/G7) в ячейке I13 – для расчета величины $P_{\text{ож}}$;

формула =(D18*I12*$E$10/G7)/(1–$E$10/G7)^2 в ячейке I14 – для расчета величины $M_{\text{ож}}$;

формула =I14/G3 в ячейке I15 – для расчета величины $\overline{T}_{\text{ож}}$;

формула =СУММПРОИЗВ(D13:D17;E13:E17)*I12 в ячейке I16 – для расчета величины C;

формула =I16/G7 в ячейке I17 – для расчета величины γ.

Для завершения формирования электронной таблицы следует последовательно скопировать формулы:

из ячейки D14 в ячейки D15:D18 для получения величин $\frac{\rho^i}{i!}, \quad i = \overline{2,5}$;

из ячейки E13 в ячейки E14:E17 для получения величин $r - i, \quad i = \overline{1,4}$.

Приведенная на рис.2.13 электронная таблица может быть успешно использована для любых разомкнутых пятиканальных систем массового обслуживания с неограниченным временем ожидания. Для этого достаточно подставить в данную электронную таблицу соответствующие исходные данные.

Для сравнения на рис.2.14 показана электронная таблица для проведения расчетов показателей *шестиканальной* (см. прим.2.3) системы массового обслуживания с неограниченным временем ожидания.

Оценка работы бригады операторов по обслуживанию туристов (система с ожиданием)

Интенсивность поступления туристов λ=	10	туристов в час
Средняя производительность оператора μ=	2.5	туриста в час
Тарифная ставка оператора t=	1.7	грн. в час
Стоимость простоя гостиничного номера Сн=	5.2	грн. в час
Число операторов r=	6	чел.

$\rho=\lambda/\mu=$ 4

Таблица для определения Po

i	(1/i)*ρ^i	r-i
0	1	6
1	4.0000	5
2	8.0000	4
3	10.6667	3
4	10.6667	2
5	8.5333	1
6	5.6889	

Показатели функционирования системы:

P_o =	0.0167
$P_{ож}$ =	0.2848
$M_{ож}$ =	0.5695
$T_{ож}$ =	0.0570
C =	2.0000
γ =	0.3333

Лист8 Лист9 Лист10 Лист11 Лист12 Лист13 Лист14 Лист15

Рис.2.14

В электронной таблице предусмотрено следующее распределение ячеек для исходных данных:

ячейка G3 – для интенсивности входного потока требований $\lambda = 10$;

ячейка G4 – для интенсивности выходного потока требований $\mu = 2.5$;

ячейка G5 – для тарифной ставки оператора $t = 1.7$;

ячейка G6 – для стоимости простоя гостиничного номера $C_н = 5.2$; ячейка G7 – для числа каналов обслуживания $r = 6$;

ячейки C13:C19 – для значений величины $i = 0,1,\ldots, 6$;

ячейка D13 – для константы 1.

В электронной таблице предусмотрена запись следующих формул для получения расчетных данных:

формула =G3/G4 в ячейке E9 – для расчета величины ρ;

формула =D13*$E$9/C14 в ячейке D14 – для расчета величины $\frac{\rho^i}{i!}$ при $i = 1$;

формула =6–C13 в ячейке E13 – для расчета величины $r - i$ при $i = 0$;

формула =1/(СУММ(D13:D18)+(D19/(1–$E$9/G7))) в ячейке I12 – для расчета величины $P_о$;

формула =D19*I12/(1–$E$9/G7) в ячейке I13 – для расчета величины $P_{ож}$;

формула =(D19*I12*$E$9/G7)/(1–$E$9/G7)^2 в ячейке I14 – для расчета величины $M_{ож}$;

формула =I14/G3 в ячейке I15 – для расчета величины $\overline{T}_{ож}$;

формула =СУММПРОИЗВ(D13:D18;E13:E18)*I12 в ячейке I16 – для расчета величины C;

формула =I16/G7 в ячейке I17 – для расчета величины γ.

Для завершения формирования электронной таблицы следует последовательно скопировать формулы:

из ячейки D14 в ячейки 15:D19 для получения величин $\frac{\rho^i}{i!}, \quad i = \overline{2,6}$;

из ячейки E13 в ячейки E14:E18 для получения величин $r - i, \quad i = \overline{1,5}$.

Приведенная на рис.2.14 электронная таблица может быть успешно использована для любых разомкнутых шестиканальных систем массового обслуживания с неограниченным временем ожидания. Для этого достаточно подставить в данную электронную таблицу соответствующие исходные данные.

2.6.3. Разомкнутая система массового обслуживания с ограниченным временем ожидания

Для разомкнутых систем массового обслуживания с непрерывным потоком требований и ограниченным временем ожидания обслуживания характерны те же особенности, что и для систем с неограниченным временем ожидания, а именно:

бесконечное число возможных состояний i, которое связано с числом требований в системе;

ограниченное число r обслуживающих каналов;

каждый канал способен одновременно обслуживать только одно требование;

при наличии свободного канала поступающее требование немедленно обслуживается;

требование, поступившее в систему в момент, когда все r каналов обслуживания заняты, становится в очередь ожидания обслуживания;

теоретически очередь требований, ожидающих обслуживание, бесконечна.

Кроме того, в разомкнутых системах массового обслуживания с непрерывным потоком требований и ограниченным временем ожидания обслуживания время ожидания в очереди каждого требования ограничено случайной величиной $t_{\text{ож}}$, среднее время которого $\bar{t}_{\text{ож}}$.

Величина, обратная среднему времени ожидания, означает среднее количество требований, покидающих очередь в единицу времени, вызванное появлением в очереди одного требования: $\nu = \dfrac{1}{\bar{t}_{\text{ож}}}$.

При наличии в очереди j требований интенсивность потока покидающих очередь требований составляет jk.

Задача определения показателей такой системы решается при наличии пуассоновского распределения потока требований и показательного закона распределения времени обслуживания. Исходными параметрами решения задачи служат:

λ – среднее количество требований, поступающих на обслуживание в единицу времени;

μ – средняя производительность обслуживающего канала (в тех же единицах измерения, что и поток требований);

ν среднее количество требований, покидающих очередь в единицу времени, вызванное появлением в очереди одного требования;

r – число обслуживающих каналов..

Вычисление основных показателей системы производится по ниже приведенным формулам:

1. *Отношение интенсивности входного потока требований к выходному* определяется по формуле (2.41).

2. *Вероятности одновременного пребывания* i *требований* в системе P_i, если $1 \le i \le r$, вычисляются по формулам (2.42) – (2.45).

3. *Вероятность одновременного пребывания* i *требований в очереди*, если $r + 1 \le i \le \infty$, вычисляется по формуле

$$P_i = \frac{\rho^r}{r!} P_0 \frac{\lambda^{i-r}}{\prod_{j=1}^{i-r} \left(r\mu + j\nu\right)}. \qquad (2.61)$$

4. *Вероятность отсутствия требований в системе* P_0, или *вероятность простоя* определяется по формуле

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^r}{r!} \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-r}}{\prod_{j=1}^{i-r} \left(r\mu + j\nu\right)} \right)^{-1}. \qquad (2.62)$$

Для одноканальной системы, когда $r = 1$, выражение (2.62) упрощается

$$P_0 = \left(1 + \rho + \rho \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{\prod_{j=1}^{i-1} \left(\mu + j\nu\right)} \right)^{-1}. \qquad (2.63)$$

В практических задачах сумму бесконечного ряда вычислить достаточно просто, так как члены ряда быстро убывают с увеличением номера члена (индекса j).

5. *Вероятность загрузки системы* (занятости обслуживанием хотя бы одного канала, относительная пропускная способность) находится по формуле

$$P_{заг} = 1 - P_0\,. \tag{2.64}$$

6. *Абсолютная пропускная способность* определяется как произведение:

$$A = \lambda\, P_{заг}\,. \tag{2.65}$$

***Пример* 2.4.** В пункте химчистки имеется три аппарата для чистки, $r = 3$. Интенсивность потока посетителей $\lambda = 6$ (*чел./ ч*). Интенсивность обслуживания посетителей одним аппаратом $\mu = 3$ (*чел./ ч*). Среднее число посетителей, покидающих очередь, не дождавшись обслуживания, $\nu = 1$ (*чел./ ч*). Найти абсолютную пропускную способность пункта химчистки.

Решение.

1. Находим величину ρ по формуле (2.41)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2\,.$$

2. Определим вероятность того, что все аппараты простаивают по формуле (2.62)

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^r}{r!} \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-r}}{\prod\limits_{j=1}^{i-r} (r\mu + j\nu)} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^3}{3!} \cdot \left(\frac{6}{3\cdot 3 + 1} + \frac{6^2}{(3\cdot 3+1)(3\cdot 3 + 2\cdot 1)} + \cdots \right) \right)^{-1} =$$

$$= \left(6\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{10} + \frac{6^2}{10\cdot 11} + \frac{6^3}{10\cdot 11\cdot 12} + \cdots \right) \right)^{-1} \approx$$

$$\approx \left(6\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{10} + \left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^3 + \cdots \right) \right)^{-1} = \left(6\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot 2 \right)^{-1} = 0{,}12$$

.

Действительное значение P_0 будет незначительно превышать найденное (не более чем на 1%).

3. Вероятность загрузки каналов определим по формуле (2.64)

$$P_{\text{заг}} = 1 - P_0 = 1 - 0{,}12 = 0{,}88.$$

4. Абсолютную пропускную способность определим по формуле (2.65):

$$A = \lambda\ P_{\text{заг}} = 6 \cdot 0{,}88 = 5{,}28.$$

Искомое решение найдено.

2.6.4. Разомкнутая система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди

Для разомкнутых систем массового обслуживания с непрерывным потоком требований и ограниченной длиной очереди ожидания обслуживания характерны следующие особенности:

конечное число возможных состояний i, которое связано с числом требований в системе, $0 \le i \le r + k$;

ограниченное число r обслуживающих каналов;

каждый канал способен одновременно обслуживать только одно требование;

при наличии свободного канала поступающее требование немедленно обслуживается;

требование, поступившее в систему в момент, когда все r каналов обслуживания заняты, становится в очередь ожидания обслуживания;

ограниченная длина k очереди требований, ожидающих обслуживания – если требование на обслуживание поступает в момент, когда в очереди находится k требований, оно безвозвратно теряется, т.е. имеет место отказ в обслуживании;

число одновременно находящихся в системе требований может изменяться от 0 до $r+k$;

в большинстве практических задач отношение $\dfrac{\lambda}{\mu \cdot r} < 1$.

Задача определения показателей такой системы решается при наличии пуассоновского распределения потока требований и показательного закона распределения времени обслуживания. Исходными параметрами решения задачи служат:

λ – среднее количество требований, поступающих на обслуживание в единицу времени;

μ – средняя производительность обслуживающего канала (в тех же единицах измерения, что и поток требований);

r – число обслуживающих каналов;

k – допустимая длина очереди.

Вычисление основных показателей системы производится по ниже приведенным формулам:

1. Отношение интенсивности входного потока требований к выходному определяется по формуле (2.41).

2. *Вероятности одновременного пребывания i требований* в системе P_i, если $1 \le i \le r$, вычисляются по формулам (2.42) – (2.45).

3. Вероятность одновременного пребывания i требований в очереди, если $r+1 \le i \le r+k$, вычисляется по формуле

$$P_i = \frac{\rho^i}{r^{i-r} r!} P_0. \tag{2.66}$$

4. Вероятность отсутствия требований в системе P_0, или *вероятность простоя,* определяется по формуле

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=r+1}^{r+k} \frac{\rho^i}{r^{i-r} r!} \right)^{-1}. \tag{2.67}$$

Вторая сумма в (2.67) представляет собой сумму убывающей геометрической прогрессии с числом членов, равным *k,* начальным членом $\frac{\rho^{r+1}}{r!r}$ и знаменателем $\frac{\rho}{r}$. Поэтому на практике используют более удобную формулу:

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{r+1}}{r \cdot r!} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^k\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)} \right)^{-1} . \tag{2.68}$$

Для одноканальной системы, когда $r = 1$, выражение (2.62) упрощается

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^{r+1}}{r \cdot r!} \cdot \frac{\left(1 - \rho^k\right)}{\left(1 - \rho\right)} \right)^{-1} . \tag{2.69}$$

4. *Вероятность отказа* находится по формуле

$$P_{отк} = P_{r+k} = \frac{\rho^{r+k}}{r^k r!} P_0 = \left(\frac{\rho}{r}\right)^k \frac{\rho^r}{r!} P_0 . \tag{2.70}$$

Для одноканальной системы выражение (2.70) упрощается:

$$P_{отк} = \rho^{r+k} P_0 . \tag{2.71}$$

5. *Средняя длина очереди* определяется соотношением

$$M_{ож} = \frac{P_0 \rho^r}{r!} \sum_{i=1}^{k} i \left(\frac{\rho}{r}\right)^i . \tag{2.72}$$

Для одноканальной системы выражение (2.72) упрощается:

$$M_{ож} = P_0 \rho^r \sum_{i=1}^{k} i \rho^i . \tag{2.73}$$

***Пример* 2.5.** На автозаправочной станции установлены три колонки для выдачи бензина, $r = 3$. Около станции находится площадка на три машины для ожидания своей очереди. На станцию прибывает в среднем две машины в минуту. Требуется определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.

Решение. Исходные данные задачи: $r = 3,\ k = 3,\ \lambda = 2$ (*мин*$^{-1}$), $\overline{T}_{\text{обс}} = 1$ (*мин*).

1. Сначала определим интенсивность обслуживания машин:

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{\text{обс}}} = 1\,(\textit{мин}^{-1}).$$

2. Далее находим величину ρ по формуле (2.41)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2\,.$$

3. Определим вероятность того, что все аппараты простаивают по формуле (2.68)

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{r+1}}{r \cdot r!} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^k\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}\right)^{-1} \approx 0{,}122\,.$$

4. Определим вероятность отказа по формуле (2.70)

$$P_{\text{отк}} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^k \frac{\rho^r}{r!} P_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{2^3}{3!} \cdot 0{,}122 = 0{,}048\,.$$

5. Определим среднюю длину очереди по формуле (2.72)

$$M_{\text{ож}} = \frac{P_0 \rho^r}{r!} \sum_{i=1}^{k} i \left(\frac{\rho}{r}\right)^i = \frac{0{,}122 \cdot 2^3}{3!} \left(\frac{2}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3\right) = 0{,}35\,.$$

Таким образом, все искомые параметры системы найдены.

Тема 2.7. Замкнутые системы массового обслуживания

Среди функционирующих замкнутых систем массового обслуживания особый интерес представляют системы:

одноканальные в установившемся режиме;

одноканальные в неустановившемся режиме;

многоканальные в установившемся режиме;

многоканальные в неустановившемся режиме.

Рассмотрим каждый тип системы более подробно.

2.7.1. Одноканальная замкнутая система массового обслуживания в установившемся режиме

Все возможные состояния одноканальной замкнутой системы массового обслуживания представляются в виде размеченного графа состояний (рис.2.9).

Для одноканальных замкнутых систем массового обслуживания характерны следующие особенности:

наличие одного канала обслуживания, r=1;

наличие m объектов, которые могут потребовать обслуживания;

число возможных состояний системы i, связанное с числом требований в системе, конечно и изменяется в диапазоне от 0 до $m+1$;

канал способен одновременно обслуживать только одно требование;

поступающее требование немедленно обслуживается, если канал свободен;

число требований j, ожидающих обслуживания, изменяется в диапазоне от 1 до m;

требование, поступившее в систему в момент, когда канал занят обслуживанием, становится в очередь ожидания обслуживания;

объект, требование на обслуживание которого удовлетворено, становится потенциальным источником нового требования.

Задача по определению показателей такой системы решается при наличии пуассоновского распределения потока требований и показательного закона распределения времени обслуживания. Исходными параметрами решения задачи служат:

m – число объектов обслуживания;

λ – среднее количество требований, поступающих на обслуживание в единицу времени;

μ – средняя производительность обслуживающего канала (в тех же единицах измерения, что и поток требований).

В установившемся режиме работы системы массового обслуживания, когда основные показатели системы постоянны в рассматриваемом периоде времени, последние вычисляются по ниже приведенным формулам:

1. *Отношение интенсивности входного потока требований к выходному* определяется по формуле (2.41) $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

2. *Вероятности одновременного пребывания i требований* в системе P_i определяются по следующим формулам:

вероятность одновременного пребывания в системе 1-го требования

$$P_1 = m\rho P_0; \tag{2.74}$$

где P_0 – вероятность отсутствия требований в системе;

вероятность одновременного пребывания в системе 2-х требований

$$P_2 = (m-1)\rho P_1 = m(m-1)\rho^2 P_0; \tag{2.75}$$

вероятность одновременного пребывания в системе 3-х требований

$$P_3 = (m-2)\rho P_2 = m(m-1)(m-2)\rho^3 P_0; \tag{2.76}$$

. . .

вероятность одновременного пребывания в системе i требований

$$P_i = \big(m-(i-1)\big)\rho P_{i-1} = m(m-1)(m-2)\cdots\big(m-(i-1)\big)\rho^i P_0 = \\ = \rho^i P_0 \prod_{j=0}^{i-1}(m-j); \tag{2.77}$$

. . .

вероятность одновременного пребывания в системе m требований

$$P_m = \rho P_{m-1} = m! \rho^m P_0 . \tag{2.78}$$

4. *Вероятность отсутствия требований в системе* P_0, или *вероятность простоя*

Как видно из соотношений (2.74) – (2.78), каждая следующая вероятность P_i получается из предыдущей P_{i-1} умножением m-(i-1) на величину ρ. Для определения P_0 учтем, что сумма всех вероятностей $P_0 + P_1 + P_2 + P_m = 1$, т.е. $\sum\limits_{i=0}^{m} \mathrm{P_i} = 1$. Из данного равенства с учетом (2.74) – (2.78) находим P_0:

$$P_0 = \left(1 + m\rho + \sum_{i=2}^{m} \rho^i \prod_{j=0}^{i-1} (m-j)\right)^{-1}; \tag{2.79}$$

5.*Коэффициент простоя обслуживающего канала*

$$\gamma = P_0 . \tag{2.80}$$

6. *Вероятность того, что обслуживающий канал окажется занятым,*

$$P_{зан} = 1 - P_0 . \tag{2.81}$$

7. *Математическое ожидание числа объектов, находящихся в системе на обслуживании или стоящих в очереди,*

$$M_{\text{сис}} = \sum_{i=0}^{m} i P_i . \tag{2.82}$$

8. *Среднее значение коэффициента простоя одного объекта по причине его обслуживания или пребывания в очереди*

$$\alpha = \frac{M_{\text{сис}}}{m} . \tag{2.83}$$

9. *Средняя длина очереди*, т.е. количество объектов ожидающих обслуживания,

$$M_{ож} = \sum_{i=1}^{m} (i-1) Pi . \tag{2.84}$$

10. *Среднее значение коэффициента простоя одного объекта* (стиральной машины) *в ожидании обслуживания*

$$\beta = \frac{M_{ож}}{m}. \qquad (2.85)$$

11. *Среднее время ожидания объектом обслуживания*

$$\overline{T}_{ож} = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{M_{ож}}{m\lambda}. \qquad (2.86)$$

Пример 2.6. Рабочий обслуживает группу автоматов, состоящую из шести стиральных машин. В среднем автомат останавливается через 12 *мин.*, т.е. в час поступает 5 требований, или λ = 5 *треб./ч.* Время обслуживания одной стиральной машины занимает у рабочего $t_{обс} = 3$ *мин.*=0,05 *ч.*, т.е. интенсивность выходного потока $\mu = \frac{1}{t_{обс}} =$ *20 треб./ч.* В результате математико-статистической обработки данных фотографии рабочего времени установлено, что поток требований простейший, а время обслуживания подчиняется показательному закону распределения. Требуется определить основные показатели функционирования банно-прачечного комбината.

Решение. Исходные данные задачи:

число каналов $r = 1$ (один рабочий);

число объектов обслуживания $m = 6$ (шесть стиральных машин);

интенсивность входного потока требований $\lambda = 5$ *треб./ч*;

интенсивность выходного потока требований $\mu = 20$ *треб./ч.*

Поскольку число обслуживаемых объектов равно шести, то система может находиться в семи различных состояниях: 0, 1, 2,…, 6 (в соответствии с возможным количеством требований в системе).

1. Находим величину ρ по формуле (2.41)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{20} = 0{,}25.$$

2. Определим вероятность того, что системный канал обслуживания (в нашем случае рабочий*)* простаивает по формуле (2.79)

$$P_0=\left(1+m\rho+\sum_{i=2}^{m}\rho^i\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)\right)^{-1}$$ = 0,117, что составляет 11,7% рабочего времени. Все промежуточные результаты расчета P_0 отражены в табл.2.7.

Таблица 2.7

i	$P_i(P_{i-1},P_0)$	P_i/P_0	P_i	$i\,P_i$	$(i-1)\,P_i$
0	$P_0=P_0$	1,00000	0,11716	0	
1	$P_1=mP_0\,\rho$	1,50000	0,17574	0,17574	0
2	$P_2=(m\text{-}1)P_1\,\rho$	1,.87500	0,21968	0,43936	0,21968
3	$P_3=(m\text{-}2)P_2\,\rho$	1,87500	0,21968	0,65904	0,43936
4	$P_4=(m\text{-}2)P_{23}\,\rho$	1,40625	0,16476	0,65904	0,49428
5	$P_5=(m\text{-}2)P_4\,\rho$	0,70313	0,08238	0,41190	0,.32952
6	$P_6=(m\text{-}2)P_5\,\rho$	0,17578	0,02059	0,12357	0,10297
		8,53516	1,00000	2,46865	1,58581

3. Определим коэффициент простоя обслуживающего канала (рабочего) в соответствии с формулой (2.80) $\gamma=P_0$=0,117.

4. Определим вероятность того, что обслуживающий канал окажется занятым по формуле (2.81) $P_{зан}=1–P_0$ = 1–0,117 =0,883, или в 88,3% случаев обслуживание произойдет не сразу, а после некоторого времени ожидания.

5. Математическое ожидание числа объектов, находящихся в системе на обслуживании или стоящих в очереди определим по формуле (2.82) $M_{сис}=\sum_{i=0}^{m}iP_i=2{,}469\,маш.$

6. Среднее значение коэффициента простоя одного объекта, по причине его обслуживания или ожидания очереди определим по формуле (2.83) $\alpha=\dfrac{M_{сис}}{m}=0{,}4114$, или 41,14% рабочего времени каж-

дая стиральная машина простаивает по причине ее обслуживания или ожидания очереди.

7. Определим математическое ожидание числа простаивающих объектов (стиральных машин), или среднюю длину очереди, по формуле (2.84)

$$M_{ож} = \sum_{i=1}^{m}(i-1)Pi = 1{,}5858 \text{ } маш.$$

8. Вычислим среднее значение коэффициента простоя одной стиральной машины в ожидании обслуживания по формуле (2.85) $\beta = \frac{M_{ож}}{m} = \frac{1{,}5858}{6} = 0{,}264$, или 26,4% рабочего времени каждая стиральная машина простаивает в ожидании, когда освободится рабочий.

9. Среднее время ожидания определим по формуле (2.86) $\overline{T}_{ож} = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{0.264}{5} \cdot 60 = 3.2$ *мин.*

Анализ результатов проведенного расчета свидетельствует о значительном простое стиральных машин в ожидании, когда рабочий освободится от обслуживания других машин. Однако решение об уменьшении количества стиральных машин, обслуживаемых одним рабочим, или об увеличении числа рабочих можно принимать только после проведения дополнительных проверочных экономических расчетов. При этом следует сопоставить убытки от простоев оборудования с дополнительными затратами, связанными с увеличением числа рабочих.

2.7.2. Компьютерный расчет показателей одноканальной замкнутой системы массового обслуживания

Для компьютерного расчета показателей замкнутой системы массового обслуживания, функционирующей в установившемся режиме, рекомендуется использовать информационную систему *Microsoft Excel.* Рассмотрим использование информационной системы *Microsoft Excel* для расчета показателей системы массового обслуживания в рамках прим.2.6. На рис.2.15 и рис.2.16 показаны фрагменты электронной таблицы для проведения расчета показателей функционирования одноканальной замкнутой системы массового обслуживания.

	A–E	F	G	H	I
1	**Оценка работы банно-прачечного комбината** (одноканальная замкнутая система)				
2					
3	**Основные исходные данные банно-прачечного комбината**				
4					
5	Количество рабочих мест r=	1			
6	Количество обслуживаемых аппаратов m =	6			
7	Интенсивность поступления требований λ=	5	требований в час		
8	Средняя производительность рабочего μ=	20	требований в час		
9					
10	**Числовые характеристики функционирования банно-прачечного комбината**				
11					
12	$\rho=\lambda/\mu$=	0.25			
13	Вероятность простоя рабочего Po=	0.117	или	11.7%	раб.времени
14	Математ. ожидание числа простаивающих машин Мсис=	2.469	машин		
15	Коэффициент простоя стиральной машины α=	0.4114	или	41.14%	раб.времени
16	Средняя длина очереди Мож =	1.5858	машин		
17	Коэффициент ожидания обслуживания β=	0.264	или	26.4%	раб.времени
18	Среднее время ожидания T=	0.053	час. или	3.2	минуты

Рис.2.15

Расчетная таблица

i	$P_i(P_0, P_{i-1})$	P_i/P_0	P_i	iP_i	$(i-1)P_i$
0	$P_0=P_0$	1.00000	0.11716	0.00000	
1	$P_1=6P_0*\rho$	1.50000	0.17574	0.17574	0.00000
2	$P_2=5P_1*\rho$	1.87500	0.21968	0.43936	0.21968
3	$P_3=4P_2*\rho$	1.87500	0.21968	0.65904	0.43936
4	$P_4=3P_3*\rho$	1.40625	0.16476	0.65904	0.49428
5	$P_5=2P_4*\rho$	0.70313	0.08238	0.41190	0.32952
6	$P_6=P_5*\rho$	0.17578	0.02059	0.12357	0.10297
		8.53516	1.00000	2.46865	1.58581

Рис.2.16

В электронной таблице предусмотрено следующее распределение ячеек для исходных данных:

ячейка F5 – для числа каналов обслуживания $r = 1$;

ячейка F6 – для числа обслуживаемых объектов $m = 6$;

ячейка F7 – для интенсивности входного потока требований λ =5;

ячейка F8 – для интенсивности выходного потока требований μ =20;

ячейки B24:B30 – для значений величины i = 0,1,…, 6;

ячейка D24 – для константы 1.

В электронной таблице предусмотрена запись следующих формул для получения расчетных числовых данных:

формула =F7/F8 в ячейке F12 – для расчета величины ρ ;

формула =E24 в ячейке F13 – для ссылки на ячейку E24 с расчетной вероятностью простоя рабочего P_0;

формула =F31 в ячейке F14 – для ссылки на ячейку F31 с расчетным математическим ожиданием числа простаивающих стиральных машин $M_{\text{сис}}$;

формула =F14/F6 в ячейке F15 – для расчета коэффициента простоя стиральной машины α ;

формула =G31 в ячейке F16 – для ссылки на ячейку G31 с расчетным математическим ожиданием средней длины очереди $M_{\text{ож}}$;

формула =F16/F6 в ячейке F17 – для расчета коэффициента простоя в ожидании обслуживания β ;

формула =F17/(F6–1) в ячейке F18 – для расчета среднего времени ожидания обслуживания $\overline{T}_{\text{ож}}$ в *час.*;

формула =F18*60 в ячейке H18 – для расчета среднего времени ожидания обслуживания $\overline{T}_{\text{ож}}$ в *мин.*;

формула =(6–B24)*D24*$F$12 в ячейке D25 – для расчета величины $(6-i)P_i\rho$ при i = 0;

формула =СУММ(D24:D30) в ячейке D31;

формула =1/D31 в ячейке E24 – для расчета вероятности P_0;

формула =$E$24*D25 в ячейке E25 – для расчета вероятности P_i при i = 1;

формула =СУММ(E24:E30) в ячейке E31;

формула =B24*E24 в ячейке F24 – для расчета величины i* P_i при i = 0;

формула =СУММ(F24:F30) в ячейке F31;

формула =B24*E25 в ячейке G25 – для расчета величины $(i-1)*P_{\text{i}}$ при $i=1$;

формула =СУММ(G25:G30) в ячейке G31.

В электронной таблице предусмотрена запись следующих формул для получения процентных числовых данных:

формула =F13 в ячейке H13 – для ссылки на ячейку F13 с целью получения времени простоя рабочего в процентах от общего рабочего времени;

формула =F15 в ячейке H15 – для ссылки на ячейку F15 с целью получения времени простоя одной стиральной машины в процентах от общего рабочего времени;

формула =F17 в ячейке H17 – для ссылки на ячейку F17 с целью получения времени простоя одной стиральной машины из-за ожидания в очереди в процентах от общего рабочего времени;

Для завершения формирования электронной таблицы следует последовательно скопировать формулы:

из ячейки D25 в ячейки D26:D30 для получения величин $(6-i)P_i\rho$ при i =1,2,3,4,5;

из ячейки E25 в ячейки E26:E30 для расчета вероятности P_{i} при i =2,3,4,5,6;

из ячейки F24 в ячейки F25:F30 для расчета вероятности $i*P_{\text{i}}$ при i =1,2,3,4,5,6;

из ячейки G25 в ячейки G26:G30 для расчета вероятности $(\text{i}-1)*P_{\text{i}}$ при i =2,3,4,5,6;

Приведенная на рис.2.15 и рис.2.16 электронная таблица может быть успешно использована для любых замкнутых одноканальных систем массового обслуживания с шестью объектами, функционирующих в установившемся режиме. Для этого достаточно подставить в данную электронную таблицу соответствующие исходные данные.

2.7.3. Одноканальная замкнутая система массового обслуживания в неустановившемся режиме и расчет ее параметров с помощью системы MathCAD 2000.

Теперь рассмотрим неустановившийся режим работы одноканальной замкнутой системы массового обслуживания, когда основные вероятностные характеристики ее зависят от временного интервала, на котором они рассматриваются. В этом случае интенсивности входных и выходных потоков для каждого состояния системы, представленной в виде размеченного графа состояний на рис.2.9, будут сбалансированы, как это показано системой дифференциальных уравнений (2.39).

Для одноканальной замкнутой системы массового обслуживания система дифференциальных уравнений (2.39) трансформируется в систему

$$
\begin{aligned}
&\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t),\\
&\frac{dP_1(t)}{dt} = \mu P_2(t) - (\mu + (m-1)\lambda)P_1(t) + m\lambda P_0(t),\\
&\frac{dP_2(t)}{dt} = \mu P_3(t) - (\mu + (m-2)\lambda)P_2(t) + (m-1)\lambda P_1(t),\\
&\ldots \\
&\frac{dP_i(t)}{dt} = \mu P_{i+1}(t) - (\mu + (m-i)\lambda)P_i(t) + (m-(i-1))\lambda P_{i-1}(t), \quad i = \overline{1,m},\\
&\ldots \\
&\frac{dP_m(t)}{dt} = -\mu P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t).
\end{aligned}
\qquad (2.87)
$$

Решение системы дифференциальных уравнений с целью определения вероятностей $P_i(t)$ требует большой вычислительной работы. Для ее решения целесообразно использовать информационную систему *MathCAD 2000*. Рассмотрим рекомендуемую технологию более подробно на прим.2.5, предположив, что основные вероятностные характеристики банно-прачечного комбината зависят от времени, например в течение 0,95 часа.

Последовательность решения

Прежде всего необходимо построить систему дифференциальных уравнений для конкретных условий функционирования баннопрачечного комбината, а именно:

число каналов r=1 (один рабочий); число объектов обслуживания m=6 (шесть стиральных машин);

интенсивность входного потока требований λ = 5 *треб./ч*;

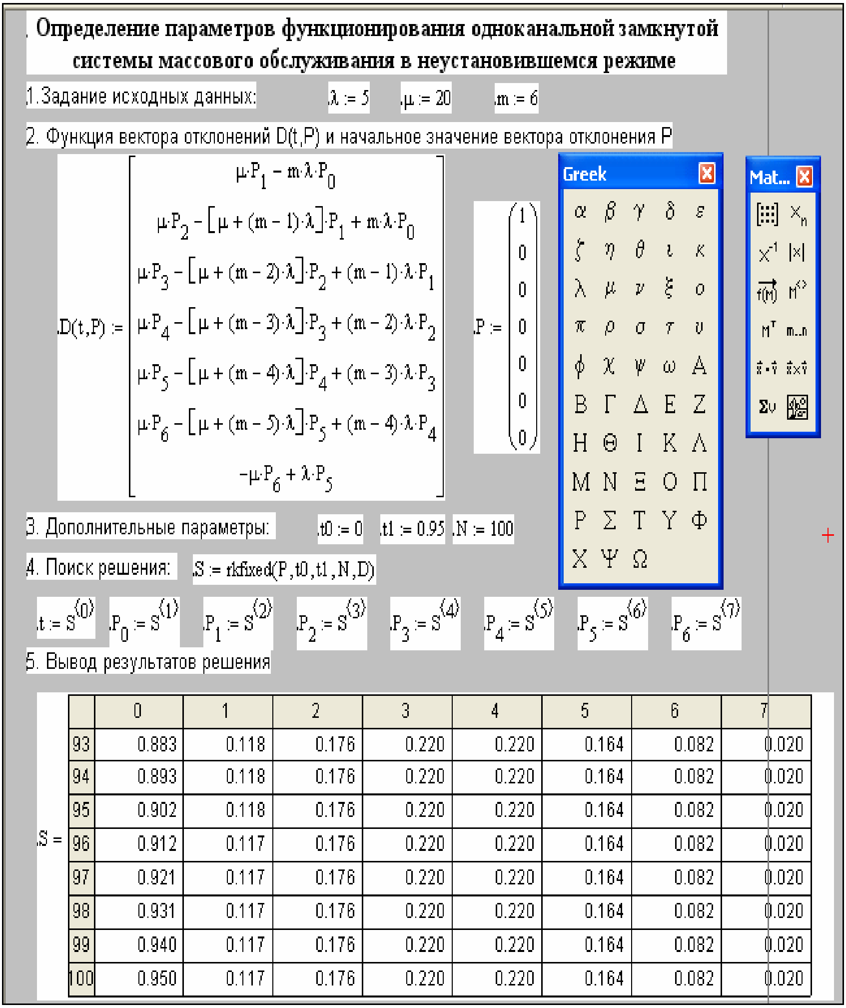
интенсивность выходного потока требований μ = 20 *треб./ч*.

Для указанных условий система (2.87) примет вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_0(t)}{dt} &= \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t), \\
\frac{dP_1(t)}{dt} &= \mu P_2(t) - (\mu + (m-1)\lambda)P_1(t) + m\lambda P_0(t), \\
\frac{dP_2(t)}{dt} &= \mu P_3(t) - (\mu + (m-2)\lambda)P_2(t) + (m-1)\lambda P_1(t), \\
\frac{dP_3(t)}{dt} &= \mu P_4(t) - (\mu + (m-3)\lambda)P_3(t) + (m-2)\lambda P_2(t), \\
\frac{dP_4(t)}{dt} &= \mu P_5(t) - (\mu + (m-4)\lambda)P_4(t) + (m-3)\lambda P_3(t), \\
\frac{dP_5(t)}{dt} &= \mu P_6(t) - (\mu + (m-5)\lambda)P_5(t) + (m-4)\lambda P_4(t), \\
\frac{dP_6(t)}{dt} &= -\mu P_6(t) + \lambda P_5(t).
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

В системе (2.88) величины λ, μ, m специально не заменяются числовыми значениями с целью более быстрой ее адаптации к условиям новых задач, если такие будут иметь место.

Этапы процесса решения задачи отражены на рис.2.17. Все необходимые действия и пояснения к ним приводятся ниже.



	0	1	2	3	4	5	6	7
93	0.883	0.118	0.176	0.220	0.220	0.164	0.082	0.020
94	0.893	0.118	0.176	0.220	0.220	0.164	0.082	0.020
95	0.902	0.118	0.176	0.220	0.220	0.164	0.082	0.020
96	0.912	0.117	0.176	0.220	0.220	0.164	0.082	0.020
97	0.921	0.117	0.176	0.220	0.220	0.164	0.082	0.020
98	0.931	0.117	0.176	0.220	0.220	0.164	0.082	0.020
99	0.940	0.117	0.176	0.220	0.220	0.164	0.082	0.020
100	0.950	0.117	0.176	0.220	0.220	0.164	0.082	0.020

Рис.2.17

Введем пояснительный текст в рабочем листе. Для этого установим курсор (визир – красный крестик) в место ввода. Затем выберем (щелчком мыши) пункт ***Insert*** (Вставка) главного меню *MathCAD*. В появившемся падающем меню выберем пункт ***Text Region*** (Текстовая область) или в месте расположения курсора нажмем комбинацию клавиш ***Shift+”*** (двойная кавычка). В обоих случаях появится шаблон, указывающий начало ввода текста. По мере ввода пояснительного текста «Определение параметров функционирования одноканальной системы массового обслуживания в неустановившемся режиме» текстовая область будет автоматически увеличиваться. По окончании этой операции выведем курсор (маркер ввода – красная вертикальная черточка) за рамку области.

Повторим описанную процедуру для ввода пояснительного текста к первому этапу «1. Задание исходных данных».

На первом этапе зададим значения для λ, μ, m. Для этого нажмем комбинацию клавиш ***Shift+:*** (двоеточие) для получения шаблона операции присваивания со знаком присваивания «**:=**» и двумя метками. На место левой метки поместим обозначение данного: λ. На место правой – ее значение: 5. Аналогично зададим μ и m.

На втором этапе введем пояснительный текст «2. Функция вектора отклонений D(t,**P***)* и начальное значение вектора отклонений **P**», а затем сформируем функцию D(t,**P***),* определяющую вектор отклонений **P** искомых величин в любой точке, и зададим начальное значение вектора. Для этого опять нажмем комбинацию клавиш ***Shift+:*** для получения шаблона операции присваивания. На место левой метки шаблона поместим имя функции вектора отклонений с аргументами: D(t,**P***)***,** а на место правой – шаблон вектор-столбца путем вызова диалогового окна командой главного меню ***Insert/Matrix*** и указания в окне параметров вектор-столбца: числа строк – 7, числа столбцов – 1. Далее в метку шаблона введем правые части уравнений системы дифференциальных уравнений (2.88) так, как показано на рис.2.17. Затем нажмем комбинацию клавиш ***Shift+:***. В правую метку появившегося на экране шаблона введем обозначение переменной **P**, а в левую вектор-столбец с семью элементами и присвоим элементам вектора начальные значения: 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0.

На третьем этапе введем пояснительный текст «3. Дополнительные параметры» и определим сами параметры: t0:=0, t1:=0.95 и N:=100. Указанные параметры соответственно определяют начальное и конечное время интегрирования системы (2.88) и число шагов интегрирования.

На четвертом этапе введем пояснительный текст «4. Поиск решения:» и найдем решение самой системы дифференциальных уравнений (2.88) с помощью встроенной функции ***rkfixed***, реализующей ний (2.88) с помощью встроенной функции ***rkfixed***, реализующей метод Рунге-Кутта с фиксированным шагом. Для вызова этой функции необходимо выполнить команду главного меню ***Insert/Function.*** После появления диалогового окна ***Insert Function*** (Вставьте функцию) в списке ***Function Category*** (Категории функций) следует отыскать категорию Differential Equation Solving (Решение дифференциального уравнения) и щелкнуть по ней левой кнопкой мыши. В правом поле ***Function Name*** (Имя функции) появится имя функции ***rkfixed***. В нижней части диалогового окна будет дано правильное написание выбранной функции со всеми ее аргументами. Затем следует щелкнуть по кнопке ***OK***. В нашем случае в качестве параметров необходимо набрать последовательность **P,t0,t1,N,D**. Все члены этой последовательности уже нами определены.

Результаты решения системы (2.88) с помощью функции ***rkfixed*** необходимо присвоить некоторой переменой **S**, которую *MathCAD 2000* воспринимает как прямоугольную матрицу размерности $N \times (2+m)$, где m – количество объектов обслуживания. На экране вызов встроенной функции должен выглядеть следующим образом:

$$.S{:=}\ \mathit{rkfixed}(P,t0,t1,N,D)\ .$$

Далее последовательно присвоим столбцы матрицы переменной интегрирования t и искомым величинам P_i:

$$.t{:=}S^{<0>};\ .P_0{:=}S^{<1>};\ .P_1{:=}S^{<2>};\ .P_2{:=}S^{<3>};\ .P_3{:=}S^{<4>};\ .P_4{:=}S^{<5>};\ .P_5{:=}S^{<6>};\ .P_6{:=}S^{<7>}.$$

На очередном шаге введем пояснительный текст «5. Вывод результатов решения» и укажем переменную **S** со знаком присваивания **:=**. Решение системы автоматически будет выведено на экран в форме таблицы, фрагмент которой показан на рис.2.17.

На последнем шаге введем пояснительный текст «6. Графическое представление решения системы дифференциальных уравнений» и вставим в рабочий лист графики вероятностей нахождения системы массового обслуживания в различных состояниях как функции времени. На рис.2.18 приведено графическое решение системы дифференциальных уравнений.

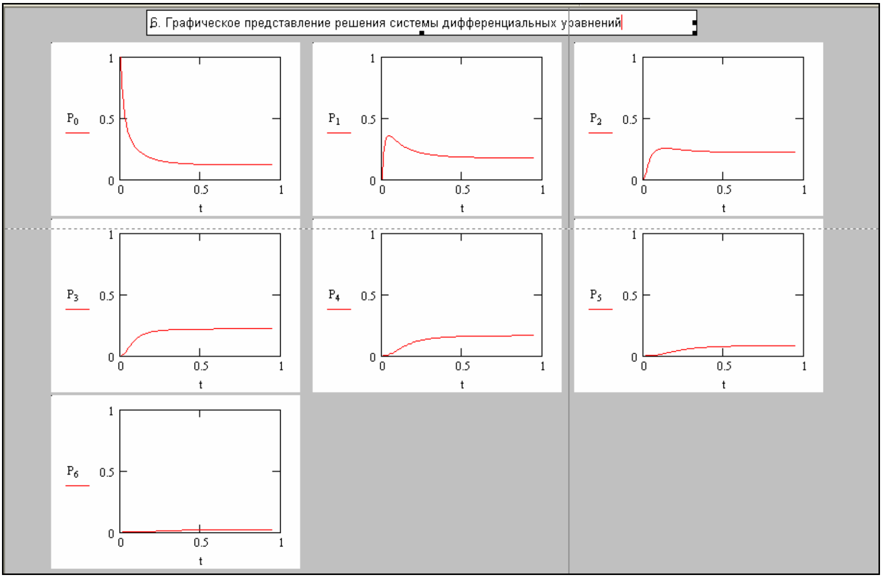


Рис.2.18

Анализируя результаты решения, представленные в матрице-таблице **S**, можно констатировать, что примерно через 0,902 часа (54минут) система переходит в установившийся режим работы. При этом вероятности состояний установившегося режима работы системы принимают значения: P_0=0,117, P_1=0,176, P_2=0,220, P_3=0,220, P_4=0,164, P_5=0,082, P_6=0,020. Полученные результаты совпадают с результатами расчета этих же вероятностей в установившемся режиме (см. табл.2.7).

2.7.4. Многоканальная замкнутая система массового обслуживания в установившемся режиме

Все возможные состояния одноканальной замкнутой системы массового обслуживания представляются в виде размеченного графа состояний (рис.2.10).

Для многоканальных замкнутых систем массового обслуживания характерны следующие особенности:

наличие конечного числа каналов обслуживания, $r > 1$;

наличие m объектов, которые могут потребовать обслуживания;

число возможных состояний системы i, связанное с числом требований в системе, конечно и изменяется в диапазоне от 0 до $m + r$;

канал способен одновременно обслуживать только одно требование;

поступающее в систему требование немедленно обслуживается, если свободен хотя бы один канал обслуживания;

число требований j, ожидающих обслуживания, изменяется в диапазоне от 1 до m;

требование, поступившее в систему в момент, когда все каналы заняты обслуживанием, становится в очередь ожидания обслуживания;

объект, у которого требование на обслуживание удовлетворено, становится потенциальным источником нового требования.

Задача по определению показателей такой системы решается при наличии пуассоновского распределения потока требований и показательного закона распределения времени обслуживания. Исходными параметрами решения задачи служат:

r – число каналов обслуживания;

m – число объектов обслуживания;

λ – среднее количество требований, поступающих на обслуживание в единицу времени;

μ – средняя производительность обслуживающего канала (в тех же единицах измерения, что и поток требований).

В установившемся режиме работы системы массового обслуживания, когда основные показатели системы постоянны в рассматриваемом периоде времени, последние вычисляются по ниже приведенным формулам. При этом будем считать, что количество объектов обслуживания превышает количество каналов, т.е. $m > r$.

1. *Коэффициент загрузки* системы определяется по формуле

(2.41) $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

2. *Вероятности одновременного пребывания* i *требований* в системе P_i определяются по следующим формулам:

вероятность одновременного пребывания в системе 1-го требования

$$P_1 = m\rho P_0, \qquad (2.89)$$

где P_0 – вероятность отсутствия требований в системе;

вероятность одновременного пребывания в системе 2-х требований

$$P_2 = (m-1)\frac{\rho}{2}P_1 = m(m-1)\frac{\rho^2}{2!}P_0; \qquad (2.90)$$

вероятность одновременного пребывания в системе 3-х требований

$$P_3 = (m-2)\frac{\rho}{3}P_2 = m(m-1)(m-2)\frac{\rho^3}{3!}P_0; \qquad (2.91)$$

. . .

вероятность одновременного пребывания в системе i требований

$$P_i = \big(m-(i-1)\big)\frac{\rho}{i}P_{i-1} = m(m-1)(m-2)\cdots\big(m-(i-1)\big)\frac{\rho^i}{i!}P_0 =$$

$$= \frac{\rho^i}{i!}P_0\prod_{j=0}^{i-1}(m-j), \quad 1 \le i \le r; \qquad (2.92)$$

. . .

вероятность одновременного пребывания в системе r требований

$$P_r = \big(m-(r-1)\big)\frac{\rho}{r}P_{r-1} = m(m-1)(m-2)\cdots\big(m-(r-1)\big)\frac{\rho^r}{r!}P_0 =$$

$$= \frac{\rho^r}{r!}P_0\prod_{j=0}^{r-1}(m-j), \quad 1 \le i \le r; \qquad (2.93)$$

вероятность одновременного пребывания в системе $(r+1)$-го требования

$$P_r = \big(m-r\big)\frac{\rho}{r}P_r = m(m-1)(m-2)\cdots\big(m-r\big)\frac{\rho^r}{r\cdot r!}P_0 =$$

$$= \frac{\rho^r}{r \cdot r!} P_0 \prod_{j=0}^{r} (m - j)\,; \tag{2.94}$$

. . .

вероятность одновременного пребывания в системе i требований

$$P_i = \bigl(m - (i-1)\bigr)\frac{\rho}{r} P_{i-1} = m(m-1)(m-2)\cdots\bigl(m-(i-1)\bigr)\frac{\rho^i}{r^{i-r} r!} P_0 =$$

$$= \frac{\rho^i}{r^{i-r} r!} P_0 \prod_{j=0}^{i-1} (m - j), \quad \bigl(r+1\bigr) \le i \le m\,; \tag{2.95}$$

. . .

вероятность одновременного пребывания в системе m требований

$$P_m = \frac{\rho}{r} P_{m-1} = \frac{m!}{r^{m-r} \cdot r!} \rho^m P_0\,. \tag{2.96}$$

3. Вероятность отсутствия требований в системе P_0. Из соотношений (2.89) – (2.96) с учетом равенства $\sum\limits_{i=0}^{m} \mathrm{P_i} = 1$ вытекает

$$P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} \bigl(m - j\bigr) + \sum_{i=r+1}^{m} \frac{\rho^i}{r^{i-r} r!} \prod_{j=0}^{i-1} \bigl(m - j\bigr)\right)^{-1}. \tag{2.97}$$

4. Математическое ожидание числа свободных каналов обслуживания

$$M_{\text{ск}} = \sum_{i=1}^{r} \bigl(r - i\bigr) P_i\,. \tag{2.98}$$

6. *Коэффициент простоя обслуживающего канала*

$$\gamma = \frac{M_{\text{ск}}}{\mathrm{r}}\,. \tag{2.99}$$

6. *Математическое ожидание числа объектов, находящихся в системе на обслуживании или стоящих в очереди,*

$$M_{\text{сис}} = \sum_{i=0}^{m} i P_i\,. \tag{2.100}$$

7. Среднее значение коэффициента простоя одного объекта по причине его обслуживания или ожидания очереди

$$\alpha = \frac{M_{\text{сис}}}{m}. \tag{2.101}$$

8. Средняя длина очереди, т.е. количество объектов, ожидающих обслуживания,

$$M_{\text{ож}} = \sum_{i=r}^{m}(i-r)Pi. \tag{2.102}$$

9. Среднее значение коэффициента простоя одного объекта в ожидании обслуживания

$$\beta = \frac{M_{\text{ож}}}{m}. \tag{2.103}$$

10. Среднее время ожидания объектом обслуживания

$$\overline{T}_{ож} = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{M_{\text{ож}}}{m\lambda}. \tag{2.104}$$

Пример 2.7. Два рабочих обслуживают группу автоматов, состоящую из 12-и стиральных машин. В среднем автомат останавливается через 12 *мин.*, т.е. в час поступает 5 требований, или λ = 5 *треб./ч*. Время обслуживания одной стиральной машины занимает у рабочего $t_{\text{обс}}$ = 3 *мин.*=0,05 *ч.*, т.е. интенсивность выходного потока $\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}}$ = *20 треб./ч.* В результате математико-статистической обработки данных фотографии рабочего времени установлено, что поток требований простейший, а время обслуживания подчиняется показательному закону распределения. Требуется определить основные показатели функционирования банно-прачечного комбината.

Решение. Исходные данные задачи:

число каналов $r = 2$ (два рабочих);

число объектов обслуживания $m = 12$ (двенадцать стиральных машин);

интенсивность входного потока требований $\lambda = 5$ *треб./ч*;

интенсивность выходного потока требований $\mu = 20$ *треб./ч.*

Поскольку общее число требований не может превзойти числа стиральных машин, то система может находиться в 12-и различных состояниях: 0, 1, 2,…, 12 (в соответствии с возможным количеством требований в системе).

5. Находим величину ρ по формуле (2.41)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{20} = 0{,}25 .$$

6. Определим вероятность отсутствия требований по формуле (2.97) $P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (m-j) + \sum_{i=r+1}^{m} \frac{\rho^i}{r^{i-r} r!} \prod_{j=0}^{i-1} (m-j)\right)^{-1} =$ 0,02638, что составляет 2,6% рабочего времени. Все промежуточные результаты расчета P_0 отражены в табл.2.8.

Таблица 2.8

i	PiP0,Pi-1)	Pi/P0	Pi	iPi	(i-2)Pi	(r-i)Pi
0	P0=P0	1,00000	0,02638	0,00000		0,052763
1	P1=12P0*r	3,00000	0,07914	0,07914		0,079144
2	P2=11P1*r	4,12500	0,10882	0,21765	0,00000	
3	P3=10P2*r	5,15625	0,13603	0,40809	0,13603	
4	P4=9P3*r	5,80078	0,15303	0,61213	0,30606	
5	P5=8P4*r	5,80078	0,15303	0,76516	0,45910	
6	P6=7P5*r	5,07568	0,13390	0,80342	0,53561	
7	P7=6P6*r	3,80676	0,10043	0,70299	0,50214	
8	P8=5P7*r	2,37923	0,06277	0,50214	0,37660	
9	P9=4P8*r	1,18961	0,03138	0,28245	0,21968	
10	P10=3P9*r	0,44611	0,01177	0,11769	0,09415	
11	P11=2P10*r	0,11153	0,00294	0,03236	0,02648	
12	P12=P11*r	0,01394	0,00037	0,00441	0,00368	
		37,90567	1,00000	4,2763	2,65953	0,131906

3. Определим математическое ожидание числа свободных рабочих (каналов) по обслуживанию стиральных машин по формуле (2.98)

$$M_{\text{ск}} = \sum_{i=1}^{r}(r-i)P_i = 0{,}1319 \text{ чел.}$$

4. Определим коэффициент простоя рабочего по формуле (2.99) $\gamma = \dfrac{M_{\text{ск}}}{\text{r}} = 0{,}066$. Следовательно, рабочий в среднем будет простаивать $6{,}6\%$ своего рабочего времени.

5. Математическое ожидание числа объектов, находящихся в системе на обслуживании или стоящих в очереди, определим по формуле (2.100) $M_{\text{сис}} = \sum\limits_{i=1}^{m} iP_i = 4{,}528$ *маш.*

6. Среднее значение коэффициента простоя одного объекта по причине его обслуживания или ожидания очереди определим по формуле (2.101) $\alpha = \dfrac{M_{\text{сис}}}{m} = 0{,}377$, или 37,7% рабочего времени каждая стиральная машина простаивает по причине ее обслуживания или ожидания очереди.

7. Определим математическое ожидание числа простаивающих объектов (стиральных машин), или среднюю длину очереди, по формуле (2.102) $M_{\text{ож}} = \sum\limits_{i=2}^{m}(i-1)Pi = 2{,}66$ *маш.*

8. Вычислим среднее значение коэффициента простоя одной стиральной машины в ожидании обслуживания по формуле (2.103) $\beta = \dfrac{M_{\text{ож}}}{m} = \dfrac{2{,}66}{12} = 0{,}2216$, или $22{,}17\%$ рабочего времени каждая стиральная машина простаивает в ожидании, когда освободится рабочий.

9. Среднее время ожидания обслуживания определим по формуле (2.104) $\overline{T}_{\text{ож}} = \dfrac{\beta}{\lambda} = \dfrac{0.2216}{5} = 0{,}018$ часа, что составляет 1,11 мин.

Анализ результатов проведенного расчета свидетельствует о значительном улучшении показателей функционирования банно-прачечного комбината. Однако, как отмечалось ранее, решение об изменении количества стиральных машин или рабочих можно принимать только после проведения дополнительных проверочных экономических расчетов.

2.7.5. Компьютерный расчет показателей многоканальной замкнутой системы массового обслуживания

Для компьютерного расчета показателей многоканальной замкнутой системы массового обслуживания, функционирующей в установившемся режиме, рекомендуется использовать информационную систему *Microsoft Excel.* Рассмотрим использование информационной системы *Microsoft Excel* для расчета показателей системы массового обслуживания, описанной в прим.2.6. На рис.2.19 и рис.2.20 показаны фрагменты электронной таблицы для проведения расчетов показателей функционирования двухканальной замкнутой системы из этого примера.

	A–F	G	H	I	J
1	**Оценка работы банно-прачечного комбината** (многоканальная замкнутая система)				
3	**Основные исходные данные банно-прачечного комбината**				
4	Количество рабочих мест r =	2			
5	Количество обслуживаемых аппаратов m =	12			
6	Интенсивность поступления требований λ=	5	требований в час		
7	Средняя производитенльность рабочего μ=	20	требований в час		
8					
9	**Основные расчетные характеристики функционирования банно-прачечного комбината**				
10	$\rho=\lambda/\mu=$	0.25			
11	Вероятность одновременного простоя рабочих P_0=	0.02638	или	2.6%	
12	Математ. ожидание числа простаивающих машин $M_{сис}$ =	4.528	машин		
13	Коэффициент простоя стиральной машины α=	0.377	или	37.7%	
14	Средняя длина очереди $M_{ож}$ =	2.66	машин		
15	Коэффициент ожидания обслуживания β=	0.2216	или	22.2%	
16	Среднее время ожидания обслуживания T=	0.018	час.или	1.11	минуты
17	Математическое ожидание числа свободных рабочих $M_{ск}$ =	0.1319	чел.		
18	Коэффициент простоя рабочих γ=	0.066	или	6.6%	

Лист8 / Лист9 / Лист10 / Лист11 / Лист12 / Лист13 / Лист14 / Лист15

Рис.2.19

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
20				Расчетная таблица							
21	i	$P_i\,(P_0, P_{i-1})$	P_i/P_0	P_i	iP_i	i-2	(i-2)Pi	r-i	(r-i)Pi		
22	0	$P_0=P_0$	1.00000	0.02638	0.00000			2	0.052763		
23	1	$P_1=12P_0{*}\rho$	3.00000	0.07914	0.07914			1	0.079144		
24	2	$P_2=11P_1{*}\rho$	4.12500	0.10882	0.21765	0	0.00000				
25	3	$P_3=10P_2{*}\rho$	5.15625	0.13603	0.40809	1	0.13603				
26	4	$P_4=9P_3{*}\rho$	5.80078	0.15303	0.61213	2	0.30606				
27	5	$P_5=8P_4{*}\rho$	5.80078	0.15303	0.76516	3	0.45910				
28	6	$P_6=7P_5{*}\rho$	5.07568	0.13390	0.80342	4	0.53561				
29	7	$P_7=6P_6{*}\rho$	3.80676	0.10043	0.70299	5	0.50214				
30	8	$P_8=5P_7{*}\rho$	2.37923	0.06277	0.50214	6	0.37660				
31	9	$P_9=4P_8{*}\rho$	1.18961	0.03138	0.28245	7	0.21968				
32	10	$P_{10}=3P_9{*}\rho$	0.44611	0.01177	0.11769	8	0.09415				
33	11	$P_{11}=2P_{10}{*}\rho$	0.11153	0.00294	0.03236	9	0.02648				
34	12	$P_{12}=P_{11}{*}\rho$	0.01394	0.00037	0.00441	10	0.00368				
35			37.90567	1.00000	4.52763		2.65953		0.131906		
36											
37											

Лист4 / Лист5 / Лист6 / Лист7 / Лист8 / Лист9 / Лист10 / Лист11 / Лист

Рис.2.20

В электронной таблице предусмотрено следующее распределение ячеек для исходных данных:

ячейка G4 – для числа каналов обслуживания $r = 2$;

ячейка G5 – для числа обслуживаемых объектов $m = 12$;

ячейка G6 – для интенсивности входного потока требований $\lambda = 5$;

ячейка G7 – для интенсивности выходного потока требований $\mu = 20$;

ячейки A22:B34 – для значений величины $i = 0,1,\ldots, 12$;

ячейка C22 – для константы 1.

В электронной таблице предусмотрена запись следующих формул для получения расчетных числовых данных:

формула =G5/G6 в ячейке G10 – для расчета величины ρ;

формула =D22 в ячейке G11 – для ссылки на ячейку D22 с расчетной вероятностью одновременного простоя рабочих P_0;

формула =E35 в ячейке G12 – для ссылки на ячейку E35 с расчетным математическим ожиданием числа простаивающих стиральных машин $M_{\text{сис}}$;

формула =G12/G5 в ячейке G13 – для расчета коэффициента простоя стиральной машины α;

формула =G35 в ячейке G14 – для ссылки на ячейку G35 с расчетным математическим ожиданием средней длины очереди $M_{\text{ож}}$;

формула =G14/G5 в ячейке G15 – для расчета коэффициента простоя стиральных машин в ожидании обслуживания β;

формула =G15/G5 в ячейке G16 – для расчета среднего времени ожидания обслуживания $\overline{T}_{\text{ож}}$ в *час.*;

формула =G15*60 в ячейке I16 – для расчета среднего времени ожидания обслуживания $\overline{T}_{\text{ож}}$ в *мин.*;

формула =I35 в ячейке G17 – для ссылки на ячейку I35 с расчетным математическим ожиданием средней длины очереди $M_{\text{ск}}$;

формула =G17/G4 в ячейке G18 – для расчета коэффициента простоя стиральных машин в ожидании обслуживания γ;

формула =(12–A22)*C22*$G$10/A23 в ячейке C23 – для расчета величины $(12-i)P_i\rho$ при $i = 1$;

формула =СУММ(C22:C34) в ячейке C35;

формула =1/C35 в ячейке D22 – для расчета вероятности P_0;

формула =$D$22*C23 в ячейке D23 – для расчета вероятности P_{i} при $i = 1$;

формула =СУММ(D22:D34) в ячейке D35;

формула =A22*D22 в ячейке E22 – для расчета величины $i*P_{\text{i}}$ при $i = 0$;

формула =СУММ(E22:E34) в ячейке E35;

формула =A24–2 в ячейке F24;

формула =A22*D24 в ячейке G24 – для расчета величины $(i–2)*P_{\text{i}}$ при $i = 2$;

формула =СУММ(G24:G34) в ячейке G35;

формула =$G$4–A22 в ячейке H22 – для расчета величины $(r-i)$ при $i = 0$;

формула =H22*D22 в ячейке I22 – для расчета величины $(r-i)*P_{\text{i}}$ при $i = 0$;

формула =СУММ(I22:I23) в ячейке I35.

В электронной таблице предусмотрена запись следующих формул для получения процентных числовых данных:

формула =G11 в ячейке I11 – для ссылки на ячейку G11 с целью получения времени одновременного простоя рабочих в процентах от общего рабочего времени;

формула =G13 в ячейке I13 – для ссылки на ячейку G13 с целью получения времени простоя одной стиральной машины в процентах от общего рабочего времени;

формула =G15 в ячейке I15 – для ссылки на ячейку G15 с целью получения времени простоя одной стиральной машины из-за ожидания в очереди в процентах от общего рабочего времени;

формула =G18 в ячейке I18 – для ссылки на ячейку G18 с целью получения времени простоя одного рабочего в процентах от общего рабочего времени;

Для завершения формирования электронной таблицы следует последовательно скопировать формулы:

из ячейки C23 в ячейки C24:C34 для получения величин $(12-i)P_i\rho$ при i =2,3, …,12;

из ячейки D23 в ячейки D24:D34 для расчета вероятности P_{i} при i=2,3,…,12;

из ячейки E22 в ячейки E23:E34 для расчета вероятности $i*P_{\mathrm{i}}$ при i =1,2,…,12;

из ячейки F24 в ячейки F25:F34 для расчета величин $(i–2)$ при i=3,4,…,12;

из ячейки H22 в ячейку H23 для расчета величины $(r–i)$ при i =1;

из ячейки I22 в ячейку I23 для расчета вероятности $(r–i)*P_{\mathrm{i}}$ при i=1.

Электронная таблица, представленная в виде фрагментов на рис.2.19 и рис.2.20, может быть успешно использована для расчета показателей функционирования любой двухканальной замкнутой системы массового обслуживания с двенадцатью объектами, работающей в установившемся режиме. Для этого достаточно подставить в данную электронную таблицу соответствующие исходные данные.

2.7.6. Многоканальная замкнутая система массового обслужи-

вания в неустановившемся режиме и расчет ее параметров с помощью системы MathCAD 2000

Теперь рассмотрим неустановившийся режим работы многоканальной замкнутой системы массового обслуживания, когда основные вероятностные характеристики ее зависят от временного интервала, на котором они рассматриваются. В этом случае интенсивности входных и выходных потоков для каждого состояния системы, представленной в виде размеченного графа состояний на рис.2.10, будут сбалансированы, как это показано системой дифференциальных уравнений (2.39).

Для двухканальной замкнутой системы массового обслуживания система дифференциальных уравнений (2.39) трансформируется в систему

$$
\begin{aligned}
&\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t),\\
&\frac{dP_1(t)}{dt} = 2\mu P_2(t) - (\mu + (m-1)\lambda)P_1(t) + m\lambda P_0(t),\\
&\frac{dP_2(t)}{dt} = 3\mu P_3(t) - (2\mu + (m-2)\lambda)P_2(t) + (m-1)\lambda P_1(t),\\
&\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.105)\\
&dP\\
&\frac{P_i(t)}{dt} = (i+1)\mu P_{i+1}(t) - (i\mu + (m-i)\lambda)P_i(t) + (m-(i-1))\lambda P_{i-1}(t),\\
&i = \overline{1, r-1},\\
&\ldots\\
&\frac{dP_r(t)}{dt} = r\mu P_{r+1}(t) - (r\mu + (m-r)\lambda)P_r(t) + (m-(r-1))\lambda P_{r-1}(t),\\
&\ldots\\
&\frac{dP_i(t)}{dt} = r\mu P_{i+1}(t) - (r\mu + (m-i)\lambda)P_i(t) + (m-(i-1))\lambda P_{i-1}(t),\\
&i = \overline{r, m},\\
&\ldots\\
&\frac{dP_m(t)}{dt} = -r\mu P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t).
\end{aligned}
$$

Для решения системы дифференциальных уравнений с целью определения вероятностей $P_i(t)$ целесообразно использовать информационную систему *MathCAD 2000*. Рассмотрим рекомендуемую технологию более подробно на прим.2.6, предположив, что основные вероятностные характеристики банно-прачечного комбината зависят от времени, например в течение одного часа.

Последовательность решения

Прежде всего, необходимо построить систему дифференциальных уравнений для конкретных условий функционирования банно-прачечного комбината, а именно: число каналов r=2 (два рабочих); число объектов обслуживания m=12 (двенадцать стиральных машин); интенсивность входного потока требований λ = 5 *треб./ч*; интенсивность выходного потока требований μ = 20 *треб./ч*.

Для указанных условий система (2.105) примет вид:

$$\begin{aligned}
\tfrac{dP_0(t)}{dt} &= \mu P_1(t) - 12\lambda P_0(t),\\
\tfrac{dP_1(t)}{dt} &= 2\mu P_2(t) - (\mu + 11\lambda)P_1(t) + 12\lambda P_0(t),\\
\tfrac{dP_2(t)}{dt} &= 2\mu P_3(t) - (2\mu + 10\lambda)P_2(t) + 11\lambda P_1(t),\\
\tfrac{dP_3(t)}{dt} &= 2\mu P_4(t) - (2\mu + 9\lambda)P_3(t) + 10\lambda P_2(t),\\
\tfrac{dP_4(t)}{dt} &= 2\mu P_5(t) - (\mu + 8\lambda)P_4(t) + 9\lambda P_3(t),\\
\tfrac{dP_5(t)}{dt} &= 2\mu P_6(t) - (\mu + 7\lambda)P_5(t) + 8\lambda P_4(t),\\
\tfrac{dP_6(t)}{dt} &= 2\mu P_7(t) - (\mu + 6\lambda)P_6(t) + 7\lambda P_5(t),\\
\tfrac{dP_7(t)}{dt} &= 2\mu P_8(t) - (\mu + 5\lambda)P_7(t) + 6\lambda P_6(t),\\
\tfrac{dP_8(t)}{dt} &= 2\mu P_9(t) - (\mu + 4\lambda)P_8(t) + 5\lambda P_7(t),\\
\tfrac{dP_9(t)}{dt} &= 2\mu P_{10}(t) - (\mu + 3\lambda)P_9(t) + 4\lambda P_8(t),\\
\tfrac{dP_{10}(t)}{dt} &= 2\mu P_{11}(t) - (\mu + 2\lambda)P_{10}(t) + 3\lambda P_9(t),\\
\tfrac{dP_{11}(t)}{dt} &= 2\mu P_{12}(t) - (\mu + \lambda)P_{11}(t) + 2\lambda P_{10}(t),\\
\tfrac{dP_{12}(t)}{dt} &= -2\mu P_6(t) + \lambda P_5(t).
\end{aligned} \tag{2.106}$$

В системе (2.106) величины λ, μ не заменяются их числовыми значениями с целью более быстрой адаптации выражений (2.106) к условиям новых задач, в случае появления последних.

Этапы процесса решения задачи отражены на рис.2.21 – 2.23 . Все необходимые действия и пояснения к ним аналогичны действиям и пояснениям, изложенным в подразделе 2.7.3.

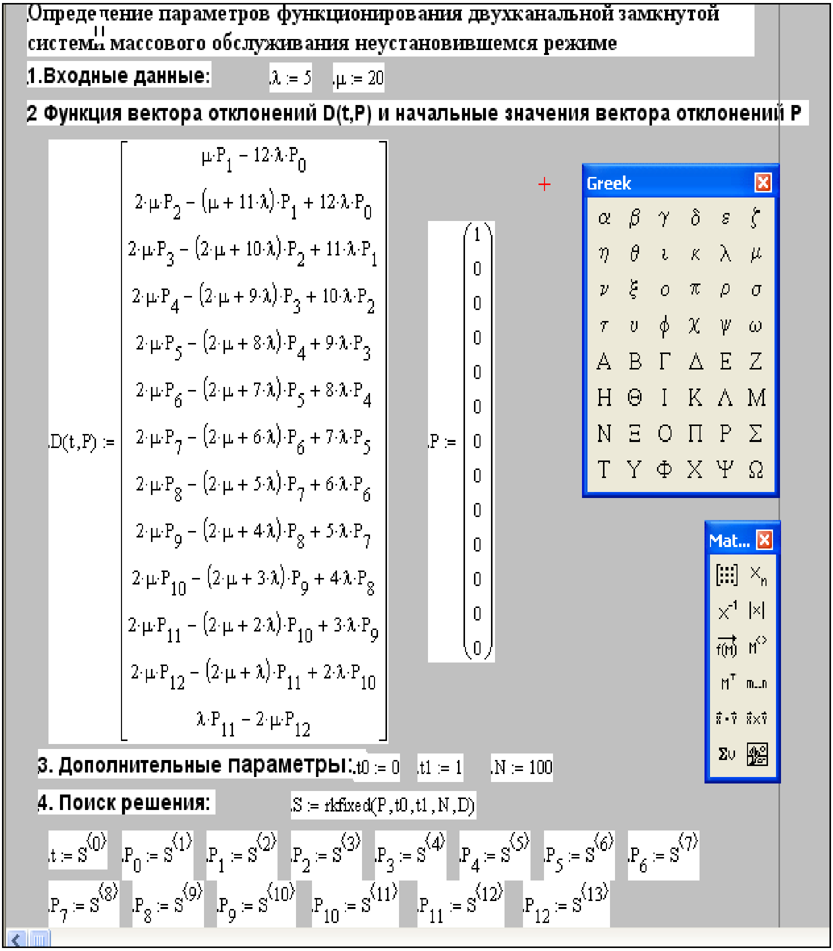


Рис.2.21

S =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
76	0.76	0.027	0.08	0.11	0.137	0.154	0.153	0.133	0.099	0.062	0.031	0.011	$2.84\cdot10^{-3}$	$.525\cdot10^{-4}$
77	0.77	0.027	0.08	0.11	0.137	0.154	0.153	0.133	0.099	0.062	0.031	0.011	$.846\cdot10^{-3}$	$.535\cdot10^{-4}$
78	0.78	0.027	0.08	0.11	0.137	0.154	0.153	0.133	0.099	0.062	0.031	0.011	$.852\cdot10^{-3}$	$.544\cdot10^{-4}$
79	0.79	0.027	0.08	0.11	0.137	0.153	0.153	0.133	0.1	0.062	0.031	0.011	$.858\cdot10^{-3}$	$.552\cdot10^{-4}$
80	0.8	0.027	0.08	0.11	0.137	0.153	0.153	0.133	0.1	0.062	0.031	0.012	$.863\cdot10^{-3}$	$3.56\cdot10^{-4}$
81	0.81	0.027	0.08	0.11	0.137	0.153	0.153	0.133	0.1	0.062	0.031	0.012	$.868\cdot10^{-3}$	$.567\cdot10^{-4}$
82	0.82	0.027	0.08	0.11	0.137	0.153	0.153	0.133	0.1	0.062	0.031	0.012	$.873\cdot10^{-3}$	$.574\cdot10^{-4}$
83	0.83	0.027	0.08	0.11	0.137	0.153	0.153	0.133	0.1	0.062	0.031	0.012	$.877\cdot10^{-3}$	$.581\cdot10^{-4}$
84	0.84	0.027	0.08	0.109	0.137	0.153	0.153	0.133	0.1	0.062	0.031	0.012	$.881\cdot10^{-3}$	$.587\cdot10^{-4}$
85	0.85	0.027	0.08	0.109	0.137	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.885\cdot10^{-3}$	$.593\cdot10^{-4}$
86	0.86	0.027	0.08	0.109	0.137	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.889\cdot10^{-3}$	$.598\cdot10^{-4}$
87	0.87	0.027	0.08	0.109	0.137	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.892\cdot10^{-3}$	$.603\cdot10^{-4}$
88	0.88	0.027	0.08	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.895\cdot10^{-3}$	$.608\cdot10^{-4}$
89	0.89	0.027	0.08	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.898\cdot10^{-3}$	$.612\cdot10^{-4}$
90	0.9	0.027	0.08	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.901\cdot10^{-3}$	$.616\cdot10^{-4}$
91	0.91	0.027	0.08	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.904\cdot10^{-3}$	$3.62\cdot10^{-4}$
92	0.92	0.027	0.079	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.906\cdot10^{-3}$	$.624\cdot10^{-4}$
93	0.93	0.027	0.079	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.908\cdot10^{-3}$	$.627\cdot10^{-4}$
94	0.94	0.026	0.079	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$2.91\cdot10^{-3}$	$3.63\cdot10^{-4}$
95	0.95	0.026	0.079	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.912\cdot10^{-3}$	$.633\cdot10^{-4}$
96	0.96	0.026	0.079	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.062	0.031	0.012	$.914\cdot10^{-3}$	$.636\cdot10^{-4}$
97	0.97	0.026	0.079	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.063	0.031	0.012	$.916\cdot10^{-3}$	$.639\cdot10^{-4}$
98	0.98	0.026	0.079	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.063	0.031	0.012	$.918\cdot10^{-3}$	$.641\cdot10^{-4}$
99	0.99	0.026	0.079	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.063	0.031	0.012	$.919\cdot10^{-3}$	$.643\cdot10^{-4}$
100	1	0.026	0.079	0.109	0.136	0.153	0.153	0.134	0.1	0.063	0.031	0.012	$.921\cdot10^{-3}$	$.646\cdot10^{-4}$

Рис.2.22

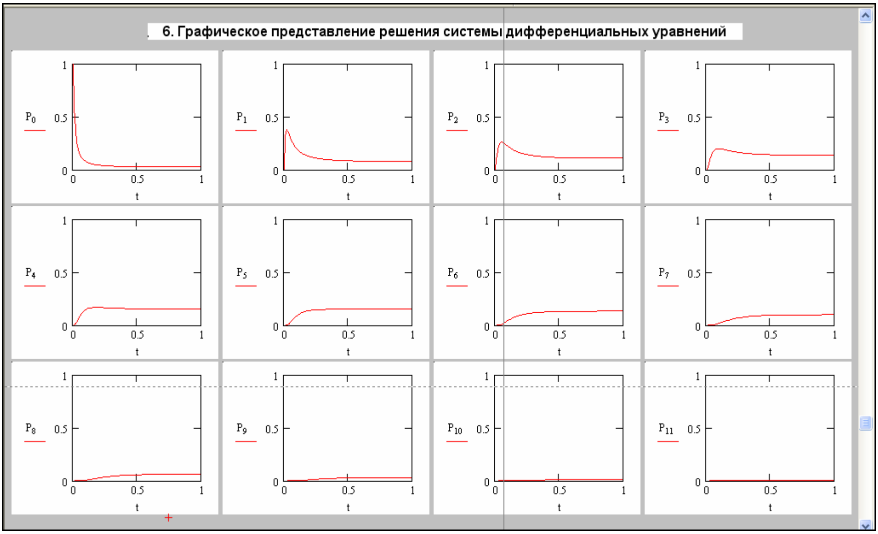


Рис.2.23

Анализируя результаты решения, представленные в матрице-таблице **S**, можно констатировать, что примерно через 0,912 часа (55 минут) система переходит в установившийся режим работы. При этом вероятности состояний установившегося режима работы системы принимают значения: P_0=0,026, P_1=0,079, P_2=0,109, P_3=0,136, P_4=0,153, P_5=0,153, P_6=0,134, P_7=0,100, P_8=0,065, P_9=0,031, P_{10}=0,012, P_{11}=0,002, P_{12}=0. Полученные результаты совпадают с результатами расчета этих же вероятностей в установившемся режиме (см. рис.2.20).

Тема 2.8. Системы массового обслуживания с отказами

2.8.1. *Одноканальная система массового обслуживания с отказами*

Все возможные состояния одноканальной системы массового обслуживания с отказами представляются в виде размеченного графа состояний, изображенного на рис.2.11.

Для одноканальных систем массового обслуживания с отказами характерны следующие особенности:

наличие одного канала обслуживания, $r = 1$;

число возможных состояний системы i, связанное с числом требований в системе, конечно и принимает значения 0 или 1;

поступающее требование немедленно обслуживается, если канал свободен;

поступающее требование покидает систему не обслуженным, если канал занят.

Задача по определению показателей такой системы решается при наличии пуассоновского распределения потока требований и показательного закона распределения времени обслуживания. Исходными параметрами решения задачи служат:

λ – среднее количество требований, поступающих на обслуживание в единицу времени;

μ – средняя производительность обслуживающего канала (в тех же единицах измерения, что и поток требований).

Основные показатели одноканальной системы массового обслуживания с отказами вычисляются по ниже приведенным формулам.

1. *Коэффициент загрузки, или отношение интенсивности входного потока требований к выходному*, определяется по формуле (2.41) $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Задача расчета показателей функционирования представляет интерес при $\rho \le 1$.

2. *Вероятность пребывания* системы в состоянии P_1 (канал обслуживания занят) определяется по формуле

$$P_1 = \rho P_0; \tag{2.107}$$

3. *Вероятность пребывания* системы в состоянии P_0 (канал обслуживания свободен). Сумма вероятностей всех состояний системы равна единице: $P_0 + P_1 = 1$. С учетом (2.107) $P_0 = 1 - \rho P_0$. Откуда

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho} \,. \tag{2.108}$$

Для одноканальной системы вероятность того, что канал свободен, P_0 соответствует *относительной производительности* системы q. Требование будет обслужено только в том случае, если в момент его поступления канал будет свободен.

Вероятность пребывания системы в состоянии P_0 позволяет определить *средний процент обслуженных требований* $m_{об}$ путем умножения P_1 на 100%..

4. *Абсолютная производительность* системы в единицу времени определяется по формуле

$$A = \lambda P_0 \,. \tag{2.109}$$

5. *Вероятность отказа* требованию в обслуживании совпадает с в*ероятностью пребывания* системы в состоянии P_1 и определяется по формуле

$$P_1 = 1 - P_0 = 1 - \frac{1}{1+\rho} = \frac{\rho}{1+\rho} \,. \tag{2.110}$$

Вероятность отказа P_1 позволяет определить *средний процент необслуженных требований* $m_{но}$ путем умножения P_0 на 100%.

Пример 2.8. На вагоноремонтном заводе из цеха горячей штамповки в среднем за 1 час поступает на контроль 8 деталей. Время обслуживания одной детали контролером равно $t_{\text{обс}}$ = 5 *мин* = 0,12 *ч*. Определить критерии функционирования системы. Поток требований – пуассоновский, время обслуживания – показательное.

Решение. Исходные данные задачи:

интенсивность входного потока требований $\lambda = 8$ *треб./ч*;

интенсивность выходного потока требований $\mu = \dfrac{1}{t_{обс}} =$ 12 *треб./ч*.

Поскольку контроль осуществляется одним контролером, а готовые детали, если контролер не свободен, остаются непроверенными, то организация контроля на заводе соответствует одноканальной системе массового обслуживания с отказами. Для расчета основных показателей функционирования такой системы используем формулы (2.41) и (2.208) – (2.210).

7. Находим величину ρ по формуле (2.41)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{12} = 0,6667 < 1.$$

8. Определим вероятность нахождения системы в состоянии P_0 (контролер свободен) по формуле (2.208)

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho} = 0,6.$$

9. Определим средний процент обслуживаемых требований

$$m_{\text{об}} = P_0 \cdot 100\% = 60\%.$$

10. Определим а*бсолютную производительность* контролера за один час по формуле (2.109)

$$A = \lambda P_0 = 4,8 \textit{ дет/ч.}$$

11. Определим вероятность нахождения системы в состоянии P_1 (контролер занят) по формуле (2.209)

$$P_1 = \frac{\rho}{1+\rho} = 0,4 \quad \text{или} \quad P_1 = 1 - P_0 = 0,4.$$

12. Определим средний процент необслуживаемых требований

$$m_{\text{ноб}} = P_1 \cdot 100\% = 40\%.$$

Если бы детали поступали равномерно и ожидали обслуживания (не было отказов), то производительность контролера была бы на 40% выше.

2.8.2. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

Все возможные состояния многоканальной системы массового обслуживания с отказами представляются в виде размеченного графа состояний, как было показано на рис.2.12.

Для многоканальных систем массового обслуживания с отказами характерны следующие особенности:

наличие нескольких каналов обслуживания, $r > 1$;

канал в каждый момент времени может обслуживать только одно требование;

число возможных состояний системы i, связанное с числом требований, находящихся в системе, конечно и принимает значения от 0 до r;

поступающее требование немедленно обслуживается, если хотя бы один канал свободен;

поступающее требование покидает систему не обслуженным, если все каналы заняты.

Задача по определению показателей такой системы решается при наличии пуассоновского распределения потока требований и показательного закона распределения времени обслуживания. Исходными параметрами решения задачи служат:

λ – среднее количество требований, поступающих на обслуживание в единицу времени;

μ – средняя производительность обслуживающего канала (в тех же единицах измерения, что и поток требований).

Основные показатели многоканальной системы массового обслуживания с отказами вычисляются по ниже приведенным формулам.

1. *Коэффициент загрузки, или отношение интенсивности входного потока требований к выходному*, определяется по формуле

(2.41): $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Задача расчета показателей функционирования представляет интерес при $\rho \le r$.

2. *Вероятности одновременного пребывания* i *требований* в системе P_i определяются по следующим формулам:

вероятность одновременного пребывания в системе 1-го требования

$$P_1 = \rho P_0, \tag{2.111}$$

где P_0 – вероятность отсутствия требований в системе;

вероятность одновременного пребывания в системе 2-х требований

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0; \tag{2.112}$$

вероятность одновременного пребывания в системе 3-х требований

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0; \tag{2.113}$$

. . .

вероятность одновременного пребывания в системе i требований

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0; \tag{2.114}$$

. . .

вероятность одновременного пребывания в системе r требований

$$P_r = \frac{\rho^r}{r!} P_0. \tag{2.115}$$

3. *Вероятность пребывания* системы в состоянии P_0 (все каналы обслуживания свободны) вычисляется по формуле

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} \right]^{-1} . \qquad (2.116)$$

4. *Вероятность отказа очередному пребыванию* $P_{\text{отк}}$ совпадает с вероятностью нахождения системы в состоянии P_{r} (все каналы обслуживания заняты), т.е. определяется по формуле (2.115).

5. *Математическое ожидание числа занятых каналов обслуживания* определяется по формуле

$$M_{\text{зан}} = \sum_{i=1}^{r} iP_i \, . \qquad (2.117)$$

6. Относительное время работы обслуживающего канала

$$\alpha = \frac{M_{зан}}{\text{r}} . \qquad (2.117)$$

Пример 2.9. В отделе технического контроля работает в смену 3 контролера. В среднем за один час в ОТК поступает 24 детали. Время обслуживания одной детали контролером 5 мин. Определить критерии функционирования системы, если поток требований простейший, а время обслуживания показательное.

Решение. Исходные данные задачи:

число каналов обслуживания r =3;
интенсивность входного потока требований $\lambda = 24$ *дет./ч*;
интенсивность выходного потока требований $\mu = \dfrac{1}{t_{обс}} =$ 12 *дет./ч*.

Поскольку контроль осуществляется тремя контролерами (r > 1), а готовые детали, если все контролеры заняты, остаются непроверенными, то организация контроля на заводе соответствует многоканальной системе массового обслуживания с отказами. Для расчета основных показателей функционирования такой системы используем формулы (2.41) и (2.208) – (2.210).

1. Находим величину ρ по формуле (2.41)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{12} = 2 < 3 = r .$$

2. Выразим вероятности P_i (i=0,1,2,3) через вероятность P_0 с помощью формул (2.111) – (2.113):

$$P_0 = P_0 ;$$

$$P_1 = \rho P_0 = \frac{2^1}{1!} P_0 ;$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0 = \frac{2^2}{2!} P_0 = 2P_0 ;$$

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 = \frac{2^3}{3!} P_0 = 1{,}3333 P_0 .$$

3. *Вероятность пребывания* системы в состоянии P_0 (все каналы обслуживания свободны) вычислим по формуле (2.116)

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{3} \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} = (1 + 2 + 2 + 1{,}3333)^{-1} = 0{,}1579 .$$

Полученная вероятность означает, что 15,79% всего рабочего времени контролеры простаивают одновременно.

4. Вероятность отказа очередному требованию $P_{отк}$ определим как вероятность P_3 (вероятность того, что все контролеры заняты), т.е. определим по формуле (2.115)

$$P_{отк} = P_з = 1{,}3333 P_0 = 1{,}3333 \cdot 0{,}1579 = 0{,}2105 .$$

Полученная вероятность означает, что 21,05% всех деталей не будут проверены контролерами.

5. Математическое ожидание числа занятых контролеров (каналов обслуживания) определим по формуле (2.116)

$$M_{зан} = \sum_{i=1}^{r} iP_i = 1 \cdot 2 \cdot 0{,}1579 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1579 + 3 \cdot 1{,}3333 \cdot 0{,}1579 = 1{,}579 \text{ чел.}$$

6. Относительное время работы одного контролера определим по формуле (2.117)

$$\alpha = \frac{M_{зан}}{\text{r}} = \frac{1{,}579}{3} = 0{,}5263\,.$$

Полученный показатель означает, что каждый контролер будет продуктивно работать только $52{,}63\%$ всего рабочего времени .

2.8.3. Компьютерный расчет показателей многоканальной системы массового обслуживания с отказами

Для компьютерного расчета показателей замкнутой системы массового обслуживания рекомендуется использовать информационную систему *Microsoft Excel.* Рассмотрим использование информационной системы *Microsoft Excel* для расчета показателей системы массового обслуживания, описанной в *прим.2.9*. На рис.2.24 показана электронная таблица для проведения расчетов показателей функционирования трехканальной системы с отказами, фигурирующей в этом примере.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Оценка работы отдела технического контроля (трехканальная система с отказами)**									
2		**Основные исходные данные отдела технического контроля**								
3					Количество рабочих мест r=	3				
4					Интенсивность поступления требований λ=	24	деталей в час			
5					Средняя производитенльность рабочего μ=	12	деталей в час			
6		**Числовые характеристики функционирования отдела технического контроля**								
7					ρ=λ/μ=	2	<=r=3			
8					Вероятность одновременного простоя контролеров Po=	0.158	или	15.8%	раб.времени	
9					Вероятность отказа в контроле Pr=	0.211	или	21.1%	непроверенных деталей	
10					Матем. ожидание числа занятых контролеров Мзан=	1.6	чел.			
11					Среднее время работы одного контролера α=	0.53	или	53%	раб.времени	
12				**Расчетная таблица**						
13		**i**	**Pi (Po,Pi-1)**	**Pi/Po**	**Pi**	**iPi**				
14		0	Po=Po	1.00000	0.15789	0.00000				
15		1	P1=Po*ρ/1	2.00000	0.31579	0.31579				
16		2	P2=P1*ρ/2	2.00000	0.31579	0.63158				
17		3	P3=P2*ρ/3	1.33333	0.21053	0.63158				
18				6.33333	1.00000	1.57895				

Лист10 / Лист11 / Лист12 / Лист13 / Лист14 / Лист15 / Лист16

Рис.2.24

В электронной таблице предусмотрено следующее распределение ячеек для исходных данных:

ячейка F3 – для числа каналов обслуживания $r = 3$;

ячейка F4 – для интенсивности входного потока требований λ =20;

ячейка F5 – для интенсивности выходного потока требований μ =12;

ячейки B14:B17 – для значений величины i = 0,1,2,3;

ячейка D14 – для константы 1;

В электронной таблице предусмотрена запись следующих формул для получения расчетных числовых данных:

формула =F4/F5 в ячейке F7 – для расчета величины ρ ;

формула =E14 в ячейке F8 – для ссылки на ячейку E14 с расчетной вероятностью одновременного простоя контролеров P_0;

формула =E17 в ячейке F9 – для ссылки на ячейку E17 с расчетной вероятностью одновременной занятости всех контролеров P_r;

формула =F18 в ячейке F10 – для ссылки на ячейку F18 с расчетным математическим ожиданием числа занятых контролеров $M_{зан}$;

формула =F10/F3 в ячейке F11 – для расчета относительного времени работы одного контролера α ;

формула =D14*$F$7 в ячейке D15 – для расчета величины $\frac{\rho}{i}P_{i-1}$, равной P_i / P_0, при i = 0;

формула =СУММ(D14:D17) в ячейке D18;

формула =1/D18 в ячейке E14 – для расчета вероятности P_0;

формула =$E$14*D15 в ячейке E15 – для расчета вероятности P_i при $i = 1$;

формула =СУММ(E14:E17) в ячейке E18;

формула =B14*E14 в ячейке F14 – для расчета величины $i{*}\,P_i$ при $i = 0$;

формула =СУММ(F14:F17) в ячейке F18.

В электронной таблице предусмотрена запись следующих формул для получения процентных числовых данных:

формула =F8 в ячейке H8 – для ссылки на ячейку F8 с целью получения времени простоя рабочего в процентах от общего рабочего времени;

формула =F9 в ячейке H9 – для ссылки на ячейку F9 с целью получения количества непроверенных деталей в процентах от общего числа деталей;

формула =F11 в ячейке H11 – для ссылки на ячейку F11 с целью получения среднего времени работы одного контролера в процентах от общего рабочего времени.

Для завершения формирования электронной таблицы следует последовательно скопировать формулы:

из ячейки D15 в ячейки D16:D17 для получения величин $\frac{\rho}{i}P_{i-1}$, равной P_i / P_0, при $i = 2,3$;

из ячейки E14 в ячейки E15:E17 для расчета вероятности P_i при i=1,2,3;

из ячейки F14 в ячейки F15:F17 для расчета вероятности $i*P_i$ при i=1,2,3.

Приведенная на рис.2.24 электронная таблица может быть успешно использована для любых трехканальных систем массового обслуживания с отказами. Для этого достаточно подставить в данную электронную таблицу соответствующие исходные данные.

2.8.4. Исследование математических моделей многоканальных систем массового обслуживания с отказами с помощью информационной системы Microsoft Excel

Анализ результатов решения прим.2.9 приводит к мысли сократить число контролеров ОТК до двух с целью увеличить показатели занятости контролеров $M_{зан}$ и α.

Ранее отмечалось, что электронную таблицу, показанную на рис.2.24, можно использовать для расчета любых трехканальных систем массового обслуживания, которые отличаются интенсивностями входного и выходного потоков. В нашем же случае требуется уменьшить *число каналов* обслуживания с трех до двух. Для моделирования двухканальной системы массового обслуживания с отказами можно построить новую (специальную) электронную таблицу. Но более верным решением будет *автоматическая генерация новой таблицы* на основе ранее созданной таблицы.

Покажем генерацию электронной таблицы для двухканальной системы массового обслуживания с отказами на основе электронной таблицы, изображенной на рис.2.24. Чтобы эту таблицу преобразовать в таблицу для двухканальной системы достаточно произвести следующие действия:

в ячейке F6 вместо числа 3 ввести число 2 (количество каналов r);

в ячейке F10 формулу с ссылкой на ячейку E17 заменить на формулу =E16, т.е. изменить указание на место положения величины P_r;

выделить строку F17 и удалить ее командой ***Правка/Удалить***.

В результате проведения указанных действий получим электронную таблицу с расчетом показателей функционирования двухканальной системы массового обслуживания с отказами (рис.2.25). Из таблицы следует, что если ОТК будет состоять из двух контролеров, то вероятность отказа очередному требованию = 0,4 (40% деталей останутся без проверки), а относительное время работы одного контролера α составит 0,6 (60% рабочего времени контролер будет занят). Как видим, ухудшение показателя α связано с улучшением показателя P_r.

В процессе исследования математических моделей многоканальных систем массового обслуживания с отказами с помощью информационной системы *Microsoft Excel* не менее важным является моделирование новых систем с увеличением числа каналов обслуживания r.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Оценка работы отдела технического контроля (двухканальная система с отказами)									
2		Основные исходные данные отдела технического контроля								
3			Количество рабочих мест r=			2				
4			Интенсивность поступления требований λ=			24	деталей в час			
5			Средняя производительность рабочего μ=			12	деталей в час			
6		Числовые характеристики отдела технического контроля								
7					ρ=λ/μ=	2	<=r=2			
8	Вероятность одновременного простоя контролеров Po=					0.200	или	20.0%	раб.времени	
9			Вероятность отказа в контроле Pr=			0.400	или	40.0%	непроверенных деталей	
10	Матем. ожидание числа занятых контролеров Mзан=					1.2	чел.			
11	Среднее время работы одного контролера α=					0.60	или	60%	раб.времени	
12				Расчетная таблица						
13		i	Pi (P0, Pi-1)	Pi/P0	Pi	iPi				
14		0	P0=P0	1.00000	0.20000	0.00000				
15		1	P1=P0*ρ/1	2.00000	0.40000	0.40000				
16		2	P2=P1*ρ/2	2.00000	0.40000	0.80000				
17				5.00000	1.00000	1.20000				
18										

Лист10 / Лист11 / Лист12 / Лист13 / Лист14 / Лист15 / Лист16

Рис.2.25

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Оценка работы отдела технического контроля(четырехканальная система с отказами)**									
2		**Основные исходные данные отдела технического контроля**								
3			Количество рабочих мест r=			4				
4			Интенсивность поступления требований λ=			24	деталей в час			
5			Средняя производительность рабочего μ=			12	деталей в час			
6		**Числовые характеристики функционирования отдела технического контроля**								
7					$\rho=\lambda/\mu$=	2	<=r=4			
8	Вероятность одновременного простоя контролеров Po=					0.143	или	14.3%	раб.времени	
9			Вероятность отказа в контроле Pr=			0.095	или	9.5%	непроверенных деталей	
10	Матем. ожидание числа занятых контролеров Мзан=					1.8	чел.			
11		Среднее время работы одного контролера α=				0.45	или	45%	раб.времени	
12				**Расчетная таблица**						
13		**i**	**$P_i(P_0,P_{i-1})$**	**P_i/P_0**	**P_i**	**iP_i**				
14		0	$P_0=P_0$	1.00000	0.14286	0.00000				
15		1	$P_1=P_0*\rho/1$	2.00000	0.28571	0.28571				
16		2	$P_2=P_1*\rho/2$	2.00000	0.28571	0.57143				
17		3	$P_3=P_2*\rho/3$	1.33333	0.19048	0.57143				
18		4	$P_4=P_3*\rho/4$	0.66667	0.09524	0.38095				
19				7.00000	1.00000	1.80952				

Лист10 / Лист11 / Лист12 / **Лист13** / Лист14 / Лист15 / Лист16

Рис.2.26

Покажем генерацию электронной таблицы для четырехканальной системы массового обслуживания с отказами на основе электронной таблицы, изображенной на рис.2.24. Чтобы эту таблицу преобразовать в таблицу для четырехканальной системы следует произвести следующие действия:

в ячейке F6 вместо числа 3 ввести число 4 (количество каналов r);

в ячейке F10 формулу с ссылкой на ячейку E17 заменить на формулу =E18, т.е. изменить указание на место положения величины P_r;

выделить строку F17 и вставить пустую строку командой ***Вставка/Строки***;

скопировать формулы из ячеек D16: F16 в ячейки D17: F18;

в ячейку B18 ввести число 4;

в ячейку C18 ввести текст «**’P4=P3*/r4**» (необязательно).

В результате проведения указанных действий получим электронную таблицу с расчетом показателей функционирования четырехканальной системы массового обслуживания с отказами (рис.2.26). Из таблицы следует, что если ОТК будет состоять из четырех контролеров, то вероятность отказа очередному требованию P_r будет равна 0,095 (9,5% деталей останутся без проверки), а относительное время работы одного контролера α составит 0,45 (только 45% рабочего времени каждый контролер будет занят). Как видим, улучшение показателя α связано с ухудшением показателя P_r.

В свою очередь, из электронной таблицы для четырехканальной системы массового обслуживания с отказами можно получить таблицу для пятиканальной системы и т.д.

В заключение отметим, что противоречивость критериев (показателей) функционирования многоканальных систем массового обслуживания требует для окончательного выбора числа обсуживающих каналов дополнительного расчета экономических показателей.

Индивидуальные задания к разделу 2

Для приобретения практических навыков по использованию математических методов и современных информационных технологий при решении конкретных задач теории массового обслуживания студенты должны выполнить *контрольную работу* №2, состоящую из трех индивидуальных заданий.

Задание №1

Условие задачи. В порту имеется причал для разгрузки грузовых судов. Интенсивность потока судов равна λ судов в сутки. Среднее время разгрузки судна составляет s суток. Предполагается, что очередь ожидающих судов может быть неограниченной длины. Определить основные показатели функционирования порта.

Параметры задачи r, λ и s каждым студентом выбираются из табл.2.9 в соответствии с его вариантом. Вариант определяется по последней цифре номера зачетной книжки студента.

Таблица 2.9 – Параметры задачи в зависимости от варианта

Пара-метр	Вариант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
λ ($сут^{-1}$)	0,5	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	0,9
s	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3

Требования к отчету студента по выполнению индивидуального задания №1. Отчет должен содержать:

условие задачи с индивидуальными исходными данными, выбранными в соответствии с вариантом;

цепь Маркова для системы массового обслуживания в условиях задачи (см. рис.2.4 в п.2.5.2);

проверку условия функционирования разомкнутой системы;

расчет показателей функционирования (вероятности одновременного пребывания в порту нескольких судов, вероятность отсутствия судов в порту, вероятность появления очереди судов, средняя длина очереди, среднее время ожидания разгрузки, среднее число свободных причалов, коэффициент простоя причала).

Задание №2

Условие задачи. Рабочий обслуживает группу из m станков. Каждый станок останавливается в среднем λ раз в час. Процесс наладки занимает в среднем t *ч*. Определить основные показатели работы наладчика и функционирования станков.

Параметры задачи m, λ и t каждым студентом выбираются из табл.2.10 в соответствии с его вариантом. Вариант определяется по последней цифре номера зачетной книжки студента.

Таблица 2.10 – Параметры задачи в зависимости от варианта

Пара-метр	Вариант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7
λ ($ч^{-1}$.)	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
t ($ч$.)	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2

Требования к отчету студента по выполнению индивидуального задания №2. Отчет должен содержать:

условие задачи с индивидуальными исходными данными, выбранными в соответствии с вариантом;

цепь Маркова для системы массового обслуживания в условиях задачи (см. рис.2.9 в п.2.5.7);

расчет показателей функционирования (вероятность простоя рабочего; вероятность занятости рабочего; математическое ожидание числа станков, требующих наладки; коэффициент простоя станка; средняя длина очереди; коэффициента простоя станка в ожидании наладки; среднее время ожидания наладки).

Задание №3

Условие задачи. В вычислительный центр коллективного пользования с r компьютерами поступают заказы на вычислительные работы от различных фирм. Если все компьютеры заняты работой, то вновь поступающий заказ не принимается и фирма вынуждена обратиться в другой вычислительный центр. Среднее время выполнения заказа составляет 4 *ч*. Интенсивность потока заявок λ. Определить основные показатели функционирования вычислительного центра.

Параметры задачи m, λ и t каждым студентом выбираются из табл.2.11 в соответствии с его вариантом. Вариант определяется по последней цифре номера зачетной книжки студента.

Таблица 2.11 – Параметры задачи в зависимости от варианта

Параметр	Вариант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
$\lambda\,(ч^{-1}.)$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

Требования к отчету студента по выполнению индивидуального задания №3. Отчет должен содержать:

условие задачи с индивидуальными исходными данными, выбранными в соответствии с вариантом;

цепь Маркова для системы массового обслуживания в условиях задачи (см. рис.2.12 в п.2.5.10);

расчет показателей функционирования вычислительного центра (коэффициент загрузки, вероятности одновременного пребывания в системе нескольких заказов, вероятность отсутствия заказов, коэффициент простоя компьютера, абсолютная производительность вычислительного центра, вероятность отказа в обслуживании);

расчет показателей функционирования вычислительного центра с помощью информационной системы *Microsoft Excel* с распечатками фрагментов соответствующей электронной таблицы (см. п.п. 2.8.3 и 2.8.4).

Требования к оформлению контрольной работы №2. Контрольная работа должна состоять из титульной страницы (см. Приложение) и трех отчетов по индивидуальным заданиям №1, №2 и №3 соответственно. Контрольная работа может быть полностью напечатана на принтере или выполнена в рукописном варианте. Во втором случае распечатки экранов в соответствии с требованиями индивидуального задания №3 должны быть аккуратно вклеены в рукописную контрольную работу.

Ключевые вопросы контроля знаний

1. Каковы основные экономические предпосылки постановки и решения задач методами математического программирования?
2. Сформулировать в общем виде задачу математического программирования.
3. Дать краткую характеристику основным классам задач математического программирования.
4. Перечислить этапы решения экстремальной задачи.
5. Дать определение понятиям: критерий оптимальности, ограничение задачи, допустимое решение, оптимальный план.
6. Сформулировать общую задачу линейного программирования.
7. В чем заключается отличие задачи линейного программирования от нелинейного?
8. Дать содержательную постановку и привести математическую модель транспортной задачи.
9. Чем закрытая модель транспортной задачи отличается от открытой? Каково условие разрешимости транспортной задачи?
10. В чем состоит сущность метода северо-западного угла при поиске начального опорного плана транспортной задачи?
11. Каково условие оптимальности опорного плана транспортной задачи? Дать определение понятиям потенциала и цикла в таблице решения транспортной задачи.
12. В чем заключается метод потенциалов при поиске оптимального опорного плана транспортной задачи?
13. Каковы преимущества информационных технологий решения транспортной задачи перед традиционными технологиями?
14. На чем основан выбор информационной системы (*Microsoft Excel* или *MathCAD* 2000) для проведения компьютерного решения транспортной задачи?
15. Сформулировать целочисленную транспортную задачу. Каково принципиальное отличие математической модели целочисленной транспортной задачи от нецелочисленной?
16. Сформулировать целочисленную транспортную задачу о распределении выпуска продукции и привести ее математическую модель.
17. Сформулировать целочисленную транспортную задачу о выборе средств доставки грузов и привести ее математическую модель.

18. Сформулировать целочисленную транспортную задачу о двухэтапной перевозке грузов и привести ее математическую модель.
19. Сформулировать целочисленную транспортную задачу о двухэтапной перевозке грузов нескольких видов и привести ее математическую модель.
20. Сформулировать целочисленную транспортную задачу о двухэтапной перевозке грузов нескольких видов по запросам потребителей и привести ее математическую модель.
21. Сформулировать целочисленную транспортную задачу о закрытии предприятия и привести ее математическую модель.
22. Сформулировать целочисленную задачу линейного программирования.
23. Каково принципиальное отличие математической модели задачи целочисленного линейного программирования от нецелочисленного?
24. Сформулировать целочисленную задачу линейного программирования о расстановке грузового флота и привести ее математическую модель.
25. Сформулировать целочисленную задачу линейного программирования о развозке грузов и привести ее математическую модель.
26. Каковы рекомендации по выбору компьютерной технологии решения целочисленных задач линейного программирования?
27. Привести примеры, подтверждающие прикладной характер теории массового обслуживания.
28. Какова отличительная особенность задач теории массового обслуживания.
29. Дать определение понятию «система массового обслуживания».
30. Перечислить составные элементы систем массового обслуживания.
31. Дать классификацию системам массового обслуживания по:
    - характеру поступления требований;
    - связи между требованиями;
    - реакции требований на занятость каналов обслуживания;
    - типу ожидания обслуживания;
    - выбору требований на обслуживание;
    - числу каналов обслуживания;
    - приоритету загрузки каналов обслуживания.
32. Дать определение пуассоновскому закону распределения случайных величин.
33. Каковы свойства простейшего потока требований?
34. Какой поток требований является стационарным?

35. Какой поток требований является ординарным?
36. В каком потоке требований отсутствует последействие?
37. Дать определение статистическому ряду распределения случайной величины. Каков порядок его построения?
38. Перечислить основные показатели функционирования систем массового обслуживания.
39. Как рассчитывается экономическая эффективность систем массового обслуживания?
40. Что представляет собой цепь Маркова?
41. Составить систему уравнений Колмогорова, характеризующую процессы гибели и размножения в однородных непрерывных марковских цепях.
42. Составить систему уравнений Колмогорова для стационарного (установившегося) режима работы однородных непрерывных марковских цепей.
43. Каковы особенности разомкнутой системы массового обслуживания с неограниченным временем ожидания?
44. Привести пример разомкнутой системы массового обслуживания с неограниченным временем ожидания.
45. Дать графическую интерпретацию разомкнутой системе массового обслуживания с неограниченным временем ожидания в виде цепи Маркова.
46. Составить систему уравнений Колмогорова для стационарного (установившегося) режима работы системы массового обслуживания с неограниченным временем ожидания.
47. Каков порядок расчета основных показателей функционирования разомкнутой системы массового обслуживания с неограниченным временем ожидания?
48. В чем состоят отличия в расчетах основных показателей функционирования одноканальных и многоканальных разомкнутых систем массового обслуживания с неограниченным временем ожидания?
49. Какая информационная система рекомендуется для компьютерного расчета основных показателей функционирования разомкнутых систем массового обслуживания с неограниченным временем ожидания?
50. Каковы особенности разомкнутой системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания?
51. Привести пример разомкнутой системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания.

52. Дать графическую интерпретацию разомкнутой системе массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в виде цепи Маркова.
53. Составить систему уравнений Колмогорова для стационарного (установившегося) режима работы системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания.
54. Каков порядок расчета основных показателей функционирования разомкнутой системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания?
55. В чем состоят отличия в расчетах основных показателей функционирования одноканальных и многоканальных разомкнутых систем массового обслуживания с ограниченным временем ожидания?
56. Каковы особенности разомкнутой системы массового обслуживания с ограниченной длиной очереди?
57. Привести пример разомкнутой системы массового обслуживания с ограниченным длиной очереди.
58. Дать графическую интерпретацию разомкнутой системе массового обслуживания с ограниченной длиной очереди в виде цепи Маркова.
59. Составить систему уравнений Колмогорова для стационарного (установившегося) режима работы системы массового обслуживания с ограниченной длиной очереди.
60. Каков порядок расчета основных показателей функционирования разомкнутой системы массового обслуживания с ограниченной длиной очереди?
61. В чем состоят отличия в расчетах основных показателей функционирования одноканальных и многоканальных разомкнутых систем массового обслуживания с ограниченной длиной очереди?
62. Каковы особенности замкнутой системы массового обслуживания?
63. Привести пример замкнутой системы массового обслуживания
64. Дать графическую интерпретацию одноканальной замкнутой системе массового обслуживания в виде цепи Маркова.
65. Составить систему уравнений Колмогорова для стационарного (установившегося) режима работы одноканальной замкнутой системы массового обслуживания.
66. Каков порядок расчета основных показателей функционирования одноканальной замкнутой системы массового?
67. Какая информационная система рекомендуется для компьютерного расчета основных показателей функционирования одноканаль-

ной замкнутой системы массового обслуживания в установившемся режиме ее работы?

68. Составить систему уравнений Колмогорова для неустановившегося режима работы одноканальной замкнутой системы массового обслуживания.
69. Составить систему уравнений Колмогорова для неустановившегося режима работы одноканальной замкнутой системы массового обслуживания.
70. Какая информационная система рекомендуется для компьютерного расчета основных показателей функционирования одноканальной замкнутой системы массового обслуживания в неустановившемся режиме ее работы?
71. Дать графическую интерпретацию многоканальной замкнутой системе массового обслуживания в виде цепи Маркова.
72. Составить систему уравнений Колмогорова для стационарного (установившегося) режима работы многоканальной замкнутой системы массового обслуживания.
73. Каков порядок расчета основных показателей функционирования многоканальной замкнутой системы массового обслуживания?
74. Какая информационная система рекомендуется для компьютерного расчета основных показателей функционирования многоканальной замкнутой системы массового обслуживания в установившемся режиме ее работы?
75. Составить систему уравнений Колмогорова для неустановившегося режима работы многоканальной замкнутой системы массового обслуживания.
76. Составить систему уравнений Колмогорова для неустановившегося режима работы многоканальной замкнутой системы массового обслуживания.
77. Какая информационная система рекомендуется для компьютерного расчета основных показателей функционирования многоканальной замкнутой системы массового обслуживания в неустановившемся режиме ее работы?
78. Каковы особенности системы массового обслуживания с отказами?
79. Привести пример одноканальной системы массового обслуживания с отказами.
80. Дать графическую интерпретацию одноканальной системе массового обслуживания с отказами в виде цепи Маркова.

81. Составить уравнение Колмогорова для стационарного (установившегося) режима работы одноканальной системы массового обслуживания с отказами.
82. Каков порядок расчета основных показателей функционирования одноканальной системы массового обслуживания с отказами?
83. Составить уравнение Колмогорова для неустановившегося режима работы одноканальной системы массового обслуживания с отказами.
84. Привести пример многоканальной системы массового обслуживания с отказами.
85. Дать графическую интерпретацию системе массового обслуживания с отказами в виде цепи Маркова.
86. Составить систему уравнений Колмогорова для стационарного (установившегося) режима работы многоканальной системы массового обслуживания с отказами.
87. Каков порядок расчета основных показателей функционирования многоканальной системы массового с отказами?
88. Какая информационная система рекомендуется для компьютерного расчета основных показателей функционирования многоканальной замкнутой системы массового обслуживания в установившемся режиме ее работы?
89. Каковы особенности использования информационных технологий в исследовании систем массового обслуживания?

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Образец титульной страницы для отчетов по контрольным работам

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
Заочний факультет

Контрольна робота з предмету ***Теорія імовірностей*** .

Студент ***4-го*** курсу. Група ***ЕПМГ-1*** . Шифр ***20547.***

Прізвище, ім'я, по-батькові ***Савіна Олена Єреміївна***

Домашня адреса: ***23100, Вінницька обл., м. Жмеринка,***

вул. Гастелла, 20, кв 146.

Дата виконання роботи ***20.03.04*** . Варіант ***№ 7.***

Відмітка про залік____________ Підпис викладача ____________

Приложение Б

Справочные данные к расчету показателей эффективности систем массового обслуживания

1. Сумма членов бесконечной убывающей прогрессии

$$S = \frac{a_1}{1-q},$$

где a_1 – начальный член прогрессии; q – знаменатель прогрессии.

2. Сумма членов убывающей прогрессии

$$S = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q},$$

где a_1 – начальный член прогрессии; q – знаменатель прогрессии; n – число членов прогрессии.

Список рекомендуемой литературы

1. *Балашевич В.А*. Математические методы в управлении производством. - Минск: Высшая школа, 1976.
2. *Венцель Е.С.* Элементы динамического программирования. - М.: Наука, 1964.
3. *Венцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей. - М.: Наука, 1973.
4. *Венцель Е.С*. Прикладные задачи теории вероятностей. - М.: Радио и связь, 1983.
5. *Вайну Я.Я.* Корреляция рядов динамики. - Т.: Статистика, 1977.
6. *Валовельская С.Н. и др.* Нелинейная корреляция и регрессия. – К.: Техника, 1971.
7. *Гольштейн Е.Г.* Задачи линейного программирования транспортного типа. - М.: Наука, 1969.
8. *Евдокимов А.Г., Самойленко Н.И., Пальченко Л.А, Рябченко И.Н.* Минимизация функций с применением микро- и мини-ЭВМ. Сборник задач и упражнений. – Харьков: Основа, 1993. – 256 с.
9. *Колесников А., Пробитюк А*. Excel 7.0 для Windows 95.– К.: Торгово-издательское бюро BH, 1996. – 464 с.
10. *Корбут А.А.,.Финкельштейн Ю.Ю.* Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
11. *Крушевский А.В., Швецов К.И.* Математическое программирование и моделирование в экономике. – К.: Вища школа, 1979.
12. Кудрявцев Е.М. MathCAD 2000. - М.: ДМК Пресс, 2001. – 576 с.
13. *Самойленко М.І.* Курс лекцій з математичного програмування.– Харків: ХДАМГ, 1997. – 103 с.
14. *Самойленко М.*І. Математичне програмування. – Харків: Основа, 2002. – 424 с.
15. *Сивый В.Е., Скоков Б.Г.* Математические методы и модели в планировании и управлении жилищно-коммунальным хозяйством. - Харьков: Основа, 1991. – 208 с
16. Справочник по математике для экономистов / Под ред. *В.И.Ермакова*. – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.
17. *Терехов Л.Л.* Экономико-математические методы и модели. - М.: Статистика, 1972.
18. *Терехов Л.Л. и др*. Экономико-математические методы и модели. в планировании и управлении. - К.: Вища школа, 1984.

Оглавление

Учебное издание

САМОЙЛЕНКО Николай Иванович,
СКОКОВ Борис Григорьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Математическое программирование
Теория массового обслуживания

Учебное пособие

Редактор *Н.З.Алябьеєв*
Корректор З.И.Зайцева
Компьютерный набор *Н.И.Самойленко*

План 2005, поз. 383

Подп. к печати 28.10.2004. Формат 60×84/16. Бумага офисная.
Печать на ризографе. Условн.-печ. л. 10,6. Уч. изд. л. 12,0
Тираж 00 экз. Зак. № . Цена договорная

61002, Харьков, ХНАГХ, ул. Революции, 12

Сектор оперативной полиграфии ИВЦ ХНАГХ
61002, Харьков, ул. Революции, 12